

# **Metodi Matematici della fisica**

Fabrizio Rovaris

Andrea Legramandi



# INDICE

## I Analisi complessa 1

- 1 INTRODUZIONE 3
  - 1.1 Il campo complesso 3
  - 1.2 Rappresentazione geometrica 6
  - 1.3 Elementi topologici dello spazio complesso 7
  - 1.4 Il punto all'infinito 8
- 2 FUNZIONI A VALORI COMPLESSI 11
  - 2.1 Principali funzione complesse 12
    - 2.1.1 Funzione esponenziale complessa 12
    - 2.1.2 Funzioni trigonometriche complesse 13
    - 2.1.3 Logaritmi complessi 14
  - 2.2 Continuità e derivabilità 15
- 3 INTEGRAZIONE SUL PIANO COMPLESSO 21
  - 3.1 Curve complesse 21
  - 3.2 Integrali di linea 22
  - 3.3 Indici e teorema di Cauchy 23
- 4 SERIE DI LAURENT E TEOREMA DEI RESIDUI 31
  - 4.1 Serie di Taylor 31
  - 4.2 Serie di Laurent 32
  - 4.3 Zeri e punti di singolarità 35
  - 4.4 I residui 38
  - 4.5 Lemma di Jordan 41
- 5 ALTRE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI 45
  - 5.1 Prolungamento analitico 45
  - 5.2 Prolungamento analitico tramite sviluppo in serie 46
  - 5.3 Punti di diramazione 46

## II Spazi di Hilbert 51

- 6 LA MISURA DI LEBESGUE 53
  - 6.1 Introduzione 53
  - 6.2 I fondamenti della teoria 54
  - 6.3 Funzioni localmente integrabili 60
  - 6.4 Uguaglianza quasi ovunque 61
  - 6.5 Convergenza di successioni 63
  - 6.6 Primitiva di una funzione 66

6.7	Generalizzazione dell'integrale di Lebesgue	67
7	SPAZI TOPOLOGICI, METRICI E DI BANACH	69
7.1	Spazio topologico	69
7.2	Spazi metrici	72
7.3	Spazi di Banach	73
7.3.1	Esempi di spazi di Banach	73
7.4	Spazi vettoriali complessi	76
8	SPAZI DI HILBERT	79
8.1	Forme sesquilineari	79
8.2	Spazi prehilbertiani e hilbertiani	82
8.3	Spazi in somma ortogonale	85
8.4	Sistemi ortonormali completi	86
8.5	Esempi di spazi di Hilbert	92
8.5.1	$\mathbb{C}^n$	92
8.5.2	$\mathcal{C}([a, b])$	92
8.5.3	$L^2([a, b])$ e $L^2(\mathbb{R})$	93
8.5.4	$l^2(\mathbb{C})$	94
9	S.O.N.C IN $L^2$	95
9.1	Serie di Fourier	95
9.1.1	Sviluppo in serie di funzioni periodiche	95
9.1.2	Proprietà della serie di Fourier	96
9.1.3	Sviluppo complesso	100
9.1.4	Funzioni con periodo arbitrario	100
9.1.5	Sviluppo di funzioni in più variabili	101
9.2	Polinomi di Hermite	102
9.3	Polinomi di Legendre	106
10	OPERATORI LINEARI IN SPAZI DI HILBERT	113
10.1	Operatori lineari in spazi infinito dimensionali	113
10.2	Operatori lineari in spazi normati	115
10.3	Funzionali lineari su spazi di Hilbert	120
10.4	Operatore aggiunto	123
10.5	Proiettori	127
10.5.1	Algebra dei proiettori	132
10.6	Operatori isometrici	133
10.7	Teoria spettrale	136
11	TRASFORMATA DI FOURIER	143
11.1	Trasformata di Fourier in $L^1(\mathbb{R})$	143
11.2	Trasformata di Fourier in $L^2(\mathbb{R})$	148
A	MATRICI DI PAULI	153
B	FUNZIONE $\zeta$ DI RIEMMAN	155

C	DELTA DI DIRAC	157
---	----------------	-----



**Parte I**

**Analisi complessa**





## 1.1 IL CAMPO COMPLESSO

Iniziamo la trattazione dei numeri complessi ricordando la definizione di campo.

**Definizione 1.1.** Un *campo* è un insieme  $\mathbb{F}$  con due operazioni una detta *somma* e una *moltiplicazione*, che soddisfano i seguenti assiomi, detti *assiomi di campo*.

### 1. Assiomi per la somma

- se  $x \in \mathbb{F}$  e  $y \in \mathbb{F}$  allora  $x + y \in \mathbb{F}$
- la somma è commutativa,  $x + y = y + x$  per ogni  $x, y \in \mathbb{F}$
- la somma è associativa,  $(x + y) + z = x + (y + z)$  per ogni  $x, y, z \in \mathbb{F}$
- $\mathbb{F}$  contiene un elemento nullo  $0$ , tale che  $0 + x = x$  per ogni  $x \in \mathbb{F}$
- ad ogni  $x \in \mathbb{F}$  corrisponde un elemento opposto  $-x \in \mathbb{F}$  tale che

$$x + (-x) = 0$$

### 2. Assiomi per la moltiplicazione

- se  $x \in \mathbb{F}$  e  $y \in \mathbb{F}$  allora  $xy \in \mathbb{F}$
- la moltiplicazione è commutativa,  $xy = yx$  per ogni  $x, y \in \mathbb{F}$
- la moltiplicazione è associativa,  $(xy)z = x(yz)$  per ogni  $x, y, z \in \mathbb{F}$
- $\mathbb{F}$  contiene un elemento neutro  $1 \neq 0$ , t.c.  $1 \cdot x = x$  per ogni  $x \in \mathbb{F}$
- se  $x \in \mathbb{F}$  e  $x \neq 0$  esiste un elemento reciproco  $1/x \in \mathbb{F}$  tale che

$$x \cdot (1/x) = 1$$

### 3. Proprietà distributiva

$$x(y + z) = xy + xz$$

per ogni  $x, y, z \in \mathbb{F}$

**Definizione 1.2.** Un numero complesso è una coppia *ordinata*  $(a, b)$  di numeri reali.

Siano  $z = (a, b)$ ,  $w = (c, d)$ , diremo che  $z = w$  se e solo se  $a = c$  e  $d = b$ , inoltre definiamo:

$$z + w = (a + c, b + d)$$

$$zw = (ac - bd, ad + bc)$$

indicheremo con  $\mathbb{C}$  l'insieme di tutti i numeri complessi.

**Teorema 1.1.**  $\mathbb{C}$  è un campo con elementi neutri della somma e del prodotto  $(0, 0)$  e  $(1, 0)$  rispettivamente.

*Dimostrazione.* Dalla definizione di somma di numeri complessi possiamo osservare che la validità degli assiomi per la somma dipendono dalle analoghe proprietà dei numeri reali, infatti, mostriamo ad esempio la proprietà commutativa; se  $z = (a, b)$  e  $w = (c, d)$ , allora:

$$\bullet \quad z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (c + a, d + b) = (c, d) + (a, b) = w + z$$

Anche le proprietà del prodotto possono essere dimostrate a partire dalle proprietà del campo dei numeri reali

$$\bullet \quad zw = (ac - bd, ad + bc) = (ca - db, da + cb) = wz.$$

Sia  $y = (e, f)$ , allora:

$$\bullet \quad (zw)y = ((ac)e - (bd)f, (ad)f + (bc)e) = (a(ce) - b(df), a(df) + b(ce)) = z(wy).$$

$$\bullet \quad (1, 0) \cdot z = (a - 0 \cdot b, 0 \cdot a + d) = z, \text{ quindi } (1, 0) \text{ è l'elemento neutro per il prodotto.}$$

$$\bullet \quad \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \cdot z = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{-ab}{a^2+b^2}\right) = (1, 0) \text{ quindi } \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right) \text{ è l'inverso di } z.$$

Infine, sia ora  $v = (e, f)$ :

$$\begin{aligned} z(w + v) &= (a, b)(c + e, d + f) \\ &= (a(c + e) - b(d + f), a(d + f) + b(c + e)) \\ &= (ac - bd, ad + bc) + (ae - bf, af + be) \\ &= zw + zv \end{aligned}$$

□

**Osservazione 1.1.** Il sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  definito come  $\mathbb{C}_0 = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$  è un campo con le stesse proprietà aritmetiche di  $\mathbb{R}$ .

**Lemma 1.** Sia  $f$  una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , definita da

$$f(x) = (x, 0)$$

allora  $f$  è un isomorfismo tra  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{C}_0$ .

**Definizione 1.3.** Definiamo *unità immaginaria* il numero complesso  $i = (0, 1)$

Dalla definizione di unità immaginaria ricaviamo un'importante proprietà per  $i$ , cioè:

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0)$$

quindi  $i$  risolve l'equazione  $x^2 + 1 = 0$ , ossia rappresenta la radice quadrata di  $-1$ .

Da questa osservazione, e dall'identificazione tra il sottoinsieme complesso  $C_0$  ed  $\mathbb{R}$  otteniamo direttamente una nuova rappresentazione per i numeri complessi, infatti:

$$\begin{aligned}(a, b) &= (a, 0) + (0, b) \\ &= (a, 0) + (b, 0)(0, 1) = a + ib\end{aligned}$$

avendo identificato i numeri  $(a, 0)$  e  $(b, 0)$  con i loro corrispondenti reali  $a$  e  $b$ .

**Definizione 1.4.** Se  $z = a + ib$  è un numero complesso, definiamo la *parte reale* e la *parte immaginaria* di  $z$  come:

$$a = \operatorname{Re}(z) \quad b = \operatorname{Im}(z)$$

Inoltre, si definisce *coniugato* del numero complesso  $z$ , un numero con stessa parte reale e parte immaginaria opposta. Il coniugato si indica con  $\bar{z} = a - ib$ .

*Osservazione 1.2.* Dalla definizione di complesso coniugato possiamo osservare che il numero  $z\bar{z}$  è un reale non negativo, infatti:

$$\begin{aligned}z \cdot \bar{z} &= (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 - iab + iab + b^2 \\ &= a^2 + b^2\end{aligned}$$

quindi  $z\bar{z}$  è nullo solamente quando  $z = 0$ .

Da questa osservazione possiamo definire una funzione norma  $|\cdot| : C \rightarrow \mathbb{R}$  come la radice quadrata positiva di  $z\bar{z}$ , cioè  $|z| = (z\bar{z})^{1/2}$

**Lemma 2.** Se  $z, w \in C$  allora:

- (i)  $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$ ;
- (ii)  $\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$ ;
- (iii)  $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$ ;
- (iv)  $z\bar{z}$  è reale e non negativo.

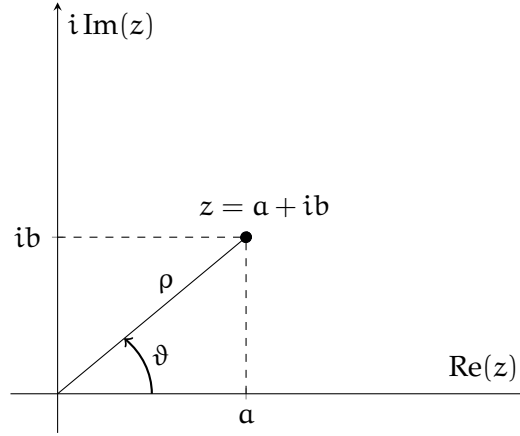


Figura 1: Piano complesso

*Dimostrazione.* Poniamo  $z = a + ib$  e  $w = c + id$ . Iniziamo dimostrando (i):

$$\begin{aligned}\overline{z + w} &= \overline{(a + ib) + (c + id)} = \overline{(a + c) + i(b + d)} \\ &= (a + c) - i(b + d) = (a - ib) + (c - id) \\ &= \bar{z} + \bar{w}\end{aligned}$$

La dimostrazione del punto (ii) è analoga, per il punto (iii) abbiamo, dalla definizione di Re e Im:

$$\begin{aligned}z + \bar{z} &= (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\operatorname{Re}(z); \\ z - \bar{z} &= (a + ib) - (a - ib) = 2ib = 2i\operatorname{Im}(z);\end{aligned}$$

Il punto (iv) è già stato discusso nell'osservazione 1.2

□

## 1.2 RAPPRESENTAZIONE GEOMETRICA

Dalle osservazioni svolte nel lemma 1 otteniamo una relazione di isomorfismo tra  $\mathbb{C}$  e  $\mathbb{R}^2$ . Per questo motivo siamo indotti a rappresentare i numeri complessi su un piano definito da una coppia di assi ortogonali orientati rappresentanti, rispettivamente,  $\operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z)$  per ogni numero  $z \in \mathbb{C}$ .

Ovviamente utilizzando questo tipo di rappresentazione per un numero complesso  $z = a + ib$  avremo come coordinate sugli assi proprio i numeri reali  $a$  e  $b$ , come mostrato in figura 1.

Un altro tipo di rappresentazione possibile per un numero nel piano complesso è quella polare; in questo caso i punti verranno individuati da una coppia di coordinate  $(\rho, \vartheta)$  ricavabili a partire da  $(a, b)$  attraverso le equazioni:

$$\begin{aligned}(1) \quad \rho &= |z| = (a^2 + b^2)^{1/2} \\ \vartheta &= \arg(z) = \arctan^*\left(\frac{b}{a}\right)\end{aligned}$$

dove si è voluto indicare con un soprasegno la funzione  $\arctan^*$ , la quale, in questo caso, va generalizzata a tutti e quattro i quadranti. L'usuale funzione  $\arctan$  infatti, restituisce valori solamente nell'intervallo  $(-\pi/2, \pi/2)$ , definendo così solamente gli argomenti di numeri complessi appartenenti al 1 e 4 quadrante, chiariremo la situazione con il seguente esempio.

*Esempio 1.1.* Sia  $z = -1 + \sqrt{3}i$  un numero complesso.  $z$  si trova chiaramente nel secondo quadrante, ma provando ad esprimerlo in coordinate polari secondo le equazioni (1) e utilizzando la solita funzione  $\arctan$ , otteniamo:

$$\begin{aligned}\rho &= \sqrt{1+3} = 2 \\ \vartheta &= \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}\end{aligned}$$

otteniamo in questo modo un numero all'interno del 4 quadrante. Risulta quindi chiaro da considerazioni trigonometriche che l'angolo corretto si ottiene sommando  $\pi$  al risultato ottenuto, quindi:

$$\arctan^*(-\sqrt{3}) = \pi + \arctan(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\pi$$

*Osservazione 1.3.* Le equazioni (1) che descrivono il passaggio alle coordinate polari nel piano non identificano univocamente il numero complesso  $(0,0)$ ; infatti, un qualsiasi numero con coordinata  $\rho = 0$ , presenterà un valore indeterminato per l'angolo  $\vartheta$ .

### 1.3 ELEMENTI TOPOLOGICI DELLO SPAZIO COMPLESSO

**Definizione 1.5** (Convergenza di successioni). Sia  $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$  una successione. Diremo che  $z_n$  converge a  $z \in \mathbb{C}$  se la successione  $|z_n - z|$  converge a zero in  $\mathbb{R}$ .

Osserviamo che valgono le seguenti disuguaglianze:

$$\begin{aligned}|\operatorname{Re}(z_n - z)| &\leq |z_n - z| \leq |\operatorname{Re}(z_n - z)| + |\operatorname{Im}(z_n - z)| \\ |\operatorname{Im}(z_n - z)| &\leq |z_n - z| \leq |\operatorname{Re}(z_n - z)| + |\operatorname{Im}(z_n - z)|\end{aligned}$$

Dalle quali segue la seguente proposizione:

**Proposizione 1.1.** Sia  $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$  una successione, allora  $\{z_n\}$  converge a  $z$  se e solo se  $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \operatorname{Re}(z)$  e  $\operatorname{Im}(z_n) \rightarrow \operatorname{Im}(z)$  per  $n \rightarrow +\infty$ .

**Definizione 1.6** (Successione di Cauchy). Sia  $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$  una successione, allora  $\{z_n\}$  è di Cauchy se  $\forall \varepsilon \exists N = N(\varepsilon)$  t.c.  $\forall n, m > N$  si ha:

$$|z_n - z_m| < \varepsilon$$

**Teorema 1.2.** Lo spazio  $(\mathbb{C}, |\cdot|)$  è di Banach.

*Dimostrazione.* Sia  $\{z_n\}$  una successione di Cauchy, allora per ogni  $\varepsilon$  esiste  $N$  tale che per ogni  $n, m > N$ :

$$|\operatorname{Re}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon$$

$$|\operatorname{Im}(z_n - z_m)| \leq |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Dunque anche le due successioni  $\{\operatorname{Re}(z_n - z_m)\}$  e  $\{\operatorname{Im}(z_n - z_m)\}$  sono di Cauchy; essendo  $\mathbb{R}$  di Banach le due successioni saranno anch'esse convergenti, e per la proposizione 1.1 anche  $\{z_n\}$  è convergente.  $\square$

**Definizione 1.7** (Convergenza di serie). Diciamo che la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} z_n$  converge a  $z \in \mathbb{C}$  se la successione  $t_k$  delle somme parziali  $t_k = \sum_{n=0}^k z_n$  converge per  $k \rightarrow +\infty$ .

Facciamo due osservazioni sulle definizioni:

1. Condizione necessaria affinché una serie di numeri complessi converga è che  $\lim_{n \rightarrow +\infty} z_n = 0$ .
2. Condizione sufficiente affinché una serie di numeri complessi converga è che *converga assolutamente*, cioè che la serie reale  $\sum_{n=0}^{+\infty} |z_n|$  sia convergente.

*Esempio 1.2.* La serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!}$  converge assolutamente, infatti:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(i\theta)^n}{n!} \right| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|\theta|^n}{n!} = e^{|\theta|}$$

*Osservazione 1.4.* Come applicazione della convergenza della serie di un esponenziale appena trattata, dimostriamo la formula di Eulero:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(i\theta)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\theta)^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \\ &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \end{aligned}$$

## 1.4 IL PUNTO ALL'INFINITO

I punti del piano complesso possono essere rappresentati come punti su una superficie sferica  $\Pi$  che si trova nello spazio Euclideo  $(\xi, \eta, \zeta)$  del tipo:

$$\Pi = \left\{ (\xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^3 : \xi^2 + \eta^2 + \left( \zeta - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

Questa è ovviamente l'equazione di una sfera di raggio  $1/2$  con centro in  $(0, 0, 1/2)$ .

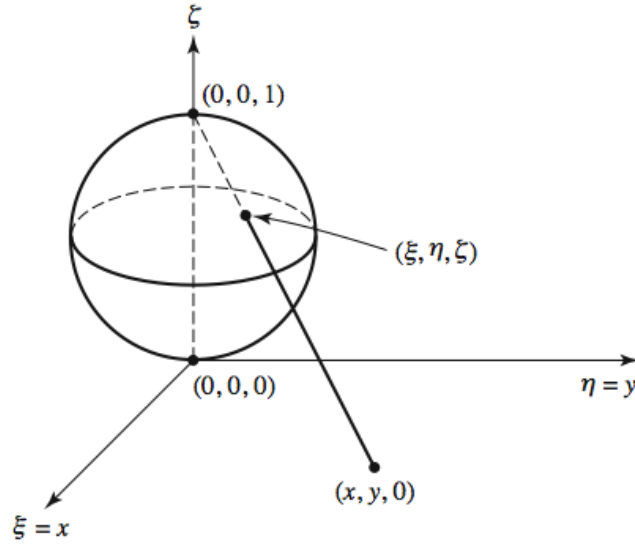


Figura 2: Rappresentazione stereografica

Dato che i numeri complessi sono rappresentati da coppie di numeri reali, possiamo identificare il piano complesso  $(x, y)$  con il piano  $(\xi, \eta, 0)$ .

Ora colleghiamo ciascun numero del piano complesso con il punto di massimo della sfera  $(0, 0, 1)$  attraverso un segmento; senza considerare quest'ultimo punto, l'intersezione fra il segmento e la sfera è ovviamente unica e ha equazioni:

$$\xi = \frac{x}{x^2 + y^2 + 1} \quad \eta = \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \quad \zeta = \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2 + 1}$$

Questo tipo di rappresentazione dei numeri complessi viene detta *rappresentazione stereografica*.

Si può notare che, allontanandoci sempre di più dall'origine, la proiezione del numero complesso sulla sfera si avvicina sempre di più al punto  $(0, 0, 1)$ , ed il segmento che li congiunge si avvicina ad essere una semiretta tangente.

**Definizione 1.8.** Definiamo *infinito* il punto che corrisponde alla rappresentazione stereografica di  $(0, 0, 1)$ .

Grazie alla definizione del punto all'infinito, possiamo chiudere il campo complesso estendendolo all'infinito:

**Definizione 1.9.** Chiamiamo  $\mathbb{C}$  esteso:  $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .





# 2

## FUNZIONI A VALORI COMPLESSI

Esistono tre principali tipologie di funzioni a valori complessi che noi tratteremo:

- (i)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}$ ; per rendere più esplicito il passaggio da campo reale a campo complesso possiamo scrivere  $f(x) = u(x) + iv(x)$ , ove  $u$  e  $v$  sono funzioni a valori reali.
- (ii)  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{C}$ , anche in questo caso possiamo scrivere  $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , ove  $u$  e  $v$  sono funzioni da  $\mathbb{R}^2$  a  $\mathbb{R}$ .
- (iii)  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} \mapsto f(z) \in \mathbb{C}$ . in questo caso se  $z = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ , possiamo ritornare a scrivere, con un leggero abuso di linguaggio,  $f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ , come nel secondo esempio. La differenza fondamentale rispetto al caso precedente è che  $f$  non mappa coppie di numeri reali in  $\mathbb{C}$ , ma rappresenta una funzione di *una sola* variabile complessa.

Chiariamo con degli esempi la differenza fra le funzioni del secondo tipo con quelle del terzo tipo; la funzione:

$$f(z) = \operatorname{Re}(z)$$

è del secondo tipo ma non del terzo, infatti  $f$  non è esprimibile come funzione di  $z$ , ma della sola parte reale, infatti possiamo scrivere  $z = x + iy = z(x, y)$  e quindi:

$$f(z) = f(z(x, y)) = x$$

Mentre la funzione:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + 2ixy + 3x + 3iy$$

è sia del secondo tipo che del terzo, infatti possiamo scrivere  $f(x, y)$  come:

$$f(z) = z^2 + 3z$$

In generale le funzioni complesse del terzo tipo vengono dette *analitiche*, mentre quelle del secondo sono dette genericamente funzioni complesse; d'ora in avanti adotteremo questa distinzione, e chiameremo, come è in uso negli altri testi, funzioni da  $\mathbb{C}$  a  $\mathbb{C}$  quelle del secondo tipo e funzioni analitiche quelle del terzo.

Si può dimostrare che tutte e sole le *funzioni analitiche* sono quelle esprimibili *in serie di potenze*.

## 2.1 PRINCIPALI FUNZIONE COMPLESSE

Tenteremo ora di generalizzare le principali classi di funzioni già note nel caso di variabili reali.

## 2.1.1 Funzione esponenziale complessa

Dobbiamo definire la funzione  $f(z) = e^z$ , con  $z = x + iy$  variabile complessa. Iniziamo osservando che:

$$e^z = e^{x+iy} = \underbrace{e^x}_{\in \mathbb{R}} \underbrace{e^{iy}}_{\in \mathbb{C}} = e^x (A(y) + iB(y))$$

dove si è osservato che la funzione complessa  $e^z$  può essere scritta come il prodotto di una parte reale  $e^x$  e una parte complessa, funzione solo della variabile  $y$ .

A questo punto restano da determinare le funzioni  $A$  e  $B$ , derivando otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} e^{iy} &= ie^{iy} = A'(y) + iB'(y) \\ \frac{d^2}{dy^2} e^{iy} &= -e^{iy} = A''(y) + iB''(y) \end{aligned}$$

dobbiamo quindi risolvere l'equazione differenziale:

$$A''(y) + iB''(y) = -A(y) - iB(y)$$

Uguagliando parte reale e immaginaria, otteniamo le seguenti equazioni differenziali del secondo ordine:

$$\begin{cases} A(y) = -A''(y), & A(0) = 1 \\ B(y) = -B''(y), & B(0) = 0 \end{cases}$$

dove le condizioni iniziali servono a soddisfare la condizione per una funzione esponenziale che  $e^0 = 1$ . Risolvendo il sistema otteniamo:

$$\begin{cases} A(y) = \cos(y) \\ B(y) = \sin(y) \end{cases}$$

giungiamo quindi alla definizione della funzione esponenziale complessa:

$$f(z) = e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos(y) + i \sin(y))$$

Dunque, richiamando le notazioni precedenti,  $u(x, y) = e^x \cos(y)$  e  $v(x, y) = e^x \sin(y)$ .

Possiamo osservare che, dalla formula di eulero vista nell'osservazione 1.4, è possibile rappresentare un numero complesso in forma esponenziale:

$$z = \rho e^{i\theta}$$

dove  $\rho = |z|$  e  $\theta$  è l'argomento di  $z$ .

*Osservazione 2.1.* La rappresentazione esponenziale rende semplice il calcolo del prodotto tra numeri complessi, infatti siano  $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$  e  $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ , abbiamo:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 e^{i\theta_1} \cdot \rho_2 e^{i\theta_2} \\ &= \rho_1 \rho_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

Questa osservazione rende immediata la dimostrazione del seguente teorema, utile nel caso del calcolo di una qualsiasi potenza intera di un numero complesso:

**Teorema 2.1** (Formula di de Moivre). *Sia  $z$  un numero complesso non nullo,  $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ , allora, per ogni intero relativo  $n$  si ha:*

$$\begin{aligned} z^n &= \rho^n e^{in\theta} \\ &= \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)) \end{aligned}$$

### 2.1.2 Funzioni trigonometriche complesse

Dalle uguaglianze:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos(\theta) + i \sin(\theta) \\ e^{-i\theta} &= \cos(\theta) - i \sin(\theta) \end{aligned}$$

Possiamo ricavare le seguenti forme per il seno ed il coseno che ben si prestano a essere generalizzate:

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \\ \cos(\theta) &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \end{aligned}$$

Per ora abbiamo considerato  $\theta \in \mathbb{R}$ . Prendiamo ora  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , allora:

$$\begin{aligned} \cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\ &= \frac{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}{2} \\ &= \frac{1}{2} e^{-y} (\cos(x) + i \sin(x)) + \frac{1}{2} e^y (\cos(x) - i \sin(x)) \\ &= \cos(x) \cosh(y) - i \sin(x) \sinh(y) \end{aligned}$$

Dunque, richiamando la notazione usata in precedenza,  $u(x, y) = \cos(x) \cosh(y)$  e  $v(x, y) = \sin(x) \sinh(y)$ .

Analogamente si ricava che il seno di un numero complesso può essere scritto come:

$$\sin(z) = \sin(x + iy) = \sin(x) \cosh(y) + i \cos(x) \sinh(y)$$

Dalla definizione è immediato verificare che vale ancora la relazione:

$$\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Notiamo infine che se  $z$  è immaginario puro, allora segue che:

$$\cos(z) = \cos(iy) = \cosh(y)$$

$$\sin(z) = \sin(iy) = i \sinh(y)$$

### 2.1.3 Logaritmi complessi

Estendiamo la funzione logaritmo anche per le variabili complesse. Sia  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ,  $z = x + iy$  e  $\theta = \arg(z)$ , allora:

$$\log(z) = \log(|z|e^{i\theta}) = \log(|z|e^{i(\theta+2k\pi)}) = \log^*(|z|) + i(\theta + 2k\pi)$$

Ove  $k \in \mathbb{N}$  e  $\log^*$  indica il consueto logaritmo dei numeri reali, abbiamo così evitato di definire la funzione logaritmo con il logaritmo stesso. Osserviamo che il logaritmo complesso presenta un'ambiguità, dovuta alla non univocità del valore di  $\arg(z)$ , che rende il risultato un insieme infinito di punti su una retta parallela all'asse immaginario.

Siamo riusciti comunque a scrivere il logaritmo in termini di funzioni già note, cioè:

$$u(x, y) = \frac{1}{2} \log^*(x^2 + y^2) \quad \text{e} \quad v(x, y) = \arctan(y/x) + 2k\pi$$

D'ora in avanti, essendo il logaritmo complesso equivalente a quello reale per numeri reali, indicheremo entrambi con  $\log$ . Notiamo inoltre che la condizione  $z \neq 0$  si è rivelata necessaria altrimenti, avremmo una contraddizione nelle condizioni di esistenza del logaritmo reale.

*Esempio 2.1 (Radici complesse).* Trattiamo ora l'elevamento a potenza di un numero complesso  $z$  per un altro numero complesso,  $w$ . Avendo già definito l'esponenziale e il logaritmo complesso, conviene procedere nel seguente modo:

$$z^w = e^{w \log(z)}$$

Questo è il metodo generale, approfondiamo ora la trattazione tramite tre esempi.

1. Iniziamo considerando  $\operatorname{Re}(w) = 1/n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  e  $\operatorname{Im}(w) = 0$ ; questa è quella che viene generalmente chiamata estrazione di una radice di un numero complesso. Sia  $\rho = |z|$  e  $\theta = \arg(z)$ , allora:

$$\begin{aligned} z^w &= e^{\frac{1}{n} \log(\rho e^{i(\theta+2k\pi)})} \\ &= e^{\frac{1}{n} (\log(\rho) + i(\theta+2k\pi))} \\ &= \rho^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\theta+2k\pi}{n}} \end{aligned}$$

Dunque la radice di un numero complesso, essendo stata definita tramite il logaritmo, è rappresentata da un numero infinito di valori che si trovano sulla circonferenza di raggio  $\rho^{\frac{1}{n}}$ . Tuttavia, dopo  $n$  valori di  $k \in \mathbb{N}$  consecutivi, la radice di  $z$  restituisce i medesimi numeri, quindi l'insieme delle soluzioni distinte è finito.

2. Consideriamo  $\operatorname{Re}(w) = \sqrt{2}$  e  $\operatorname{Im}(w) = 0$ . Procediamo come sopra:

$$\begin{aligned} z^w &= e^{\sqrt{2} \log(\rho e^{i(\theta+2k\pi)})} \\ &= e^{\sqrt{2}(\log(\rho) + i(\theta+2k\pi))} \\ &= \rho^{\sqrt{2}} e^{i\sqrt{2}(\theta+2k\pi)} \end{aligned}$$

Anche stavolta abbiamo infiniti valori sulla circonferenza di raggio  $\rho^{\sqrt{2}}$ , tuttavia, a differenza dell'esempio precedente, per nessuna coppia di valori di  $k$  avremmo due volte lo stesso numero complesso, essendo  $\sqrt{2}$  irrazionale, quindi il risultato sarà un insieme di punti densi sulla circonferenza.

3. Come conclusione della trattazione sulle potenze consideriamo il caso  $z = 1 + i\sqrt{3}$  e  $w = 1 + i2$ .

$$\begin{aligned} z^w &= e^{(1+i2)(\log(2) + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi))} = \\ &= e^{\log(2) - \frac{2}{3}\pi - 4k\pi} e^{i(\log(2) + \frac{\pi}{3} + 2k\pi)} \end{aligned}$$

Notiamo che in questo caso a variare è sia il modulo della radice che il valore dell'angolo. Per questo particolare esempio i valori sono tutti distribuiti sulla retta di coefficiente angolare  $\log(2) + \frac{\pi}{3}$ ; si accumulano nell'origine per  $k$  positivo e divergono all'infinito per  $k$  negativo.

## 2.2 CONTINUITÀ E DERIVABILITÀ

**Definizione 2.1.** Sia  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e  $z_0 \in \mathcal{D}$ , diciamo che  $f$  è continua in  $z_0$  se  $\forall \varepsilon \exists \delta$  t.c. se  $|z - z_0| < \delta$  allora  $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ .

Un utile criterio per provare la continuità di funzioni in campo complesso è fornito dal seguente teorema.

**Teorema 2.2.** Sia  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$  e  $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathcal{D}$ , allora  $f$  è continua in  $z_0$  se e solo se  $u$  e  $v$  sono funzioni continue in  $(x_0, y_0)$ .

*Dimostrazione.* ( $\Rightarrow$ ) Se  $f$  è continua in  $z_0$ , allora:

$$\|(x, y) - (x_0, y_0)\| = |z - z_0| < \delta$$

implica che:

$$\begin{aligned} |u(x, y) - u(x_0, y_0)| &\leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \\ |v(x, y) - v(x_0, y_0)| &\leq |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon \end{aligned}$$

cioè la tesi.

( $\Leftarrow$ ) Se  $u$  è continua in  $(x_0, y_0)$  allora  $\forall \frac{\varepsilon}{2} \exists \delta$  t.c. se  $\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$  allora  $|u(x, y) - u(x_0, y_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ; analogamente, sostituendo  $u$  con  $v$  nelle espressioni viste sopra, otteniamo la relazione di continuità per quest'ultima. Dunque:

$$|z - z_0| = \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$$

implica:

$$|f(z) - f(z_0)| \leq |u(x, y) - u(x_0, y_0)| + |v(x, y) - v(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

E questo completa la dimostrazione  $\square$

**Definizione 2.2.** Sia  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , e sia  $z_0 \in \mathcal{D}$ , diciamo che  $f$  è derivabile in  $z_0$  se:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} =: f'(z_0)$$

esiste finito.

Notiamo che la definizione è equivalente a richiedere che esista finito:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Si osserva immediatamente che la derivabilità di una funzione a valori complessi è un argomento più delicato della continuità; infatti, preso un punto qualsiasi  $z_0 = x_0 + i y_0$ , possiamo calcolare il rapporto incrementale avvicinandoci ad esso da infiniti cammini differenti, e in generale non avremmo la stessa derivata. Tuttavia si può dimostrare che valgono le seguenti condizioni, chiamate *equazioni di Cauchy-Riemann*.

**Proposizione 2.1.** Sia  $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + i v(x, y)$  come sopra, allora se  $f$  è differenziabile in  $z_0$ :

$$(2) \quad \begin{aligned} \partial_x u(x_0, y_0) &= \partial_y v(x_0, y_0) \\ \partial_x v(x_0, y_0) &= -\partial_y u(x_0, y_0) \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Fissiamo  $y_0$  e avviciniamoci a  $z_0$  con una retta parallela all'asse reale, dunque:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} i \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = \\ &= \partial_x u(x_0, y_0) + i \partial_x v(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Se invece fissiamo  $x_0$  e ci avviciniamo a  $z_0$  con una retta parallela all'asse immaginario otteniamo:

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} + \lim_{y \rightarrow y_0} i \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{i(y - y_0)} = \\ &= -i \partial_y u(x_0, y_0) + \partial_y v(x_0, y_0)\end{aligned}$$

Poiché  $f$  è differenziabile per ipotesi, il limite deve essere unico, cioè:

$$\partial_x u(x_0, y_0) + i \partial_x v(x_0, y_0) = -i \partial_y u(x_0, y_0) + \partial_y v(x_0, y_0)$$

Eguagliando parte reale e parte immaginaria, si ha la tesi.  $\square$

Per compattezza spesso scriveremo le equazioni di Cauchy-Riemann nella seguente forma abbreviata:

$$\partial_y f = i \partial_x f$$

*Osservazione 2.2.* Osserviamo, in questo caso, che una funzione  $f$ , dipendente da *una sola* variabile complessa, e differenziabile soddisfa sempre le equazioni (2) di Cauchy-Riemann. Non si può affermare la stessa cosa, però, nel caso di una generica funzione a valori complessi, infatti, se  $f = f(x, y)$ ,  $f$  può avere componenti differenziabile senza però esserlo nel campo complesso.

*Esempio 2.2.* Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  t.c.  $f(x, y) = x^2 + iy$ , abbiamo

$$\begin{aligned}\partial_x f(x, y) &= 2x \\ \partial_y f(x, y) &= i\end{aligned}$$

e, chiaramente, non vale che  $i \partial_x f = \partial_y f$ , quindi le (2) non sono soddisfatte.

Per quanto visto, continueremo ad identificare le funzioni a valori complessi con  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e specificheremo, volta per volta, se la funzione richiesta deve soddisfare le (2) identificandola come funzione olomorfa, nel senso spiegato dalla seguente definizione.

**Definizione 2.3.** Sia  $f$  è una funzione a valori complessi, se  $f$  è derivabile in senso complesso in  $z_0$  diciamo che è olomorfa in  $z_0$ ; se  $f$  è olomorfa per ogni  $z \in \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C}$ , diciamo che  $f$  è olomorfa in  $\mathcal{D}$ .

Se  $f$  è olomorfa, in  $z_0$  allora saranno di certo soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann.

*Esempio 2.3.* Sia  $z = x + iy$  e  $f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$ , ovviamente  $u(x, y) \equiv x$  e  $v(x, y) \equiv 0$ . Ci chiediamo ora se  $f$  è derivabile in  $\mathbb{C}$ ; verifichiamo allora se sono soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned}\partial_x u &= 1 \neq 0 = \partial_y v \\ -\partial_y u &= 0 = \partial_x v\end{aligned}$$

Siccome le uguaglianze in questo caso valgono per ogni coppia  $(x, y)$ ,  $f$  non è derivabile in nessun punto di  $\mathbb{C}$ .

*Esempio 2.4.*  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  in questo caso abbiamo  $u(x, y) \equiv \sqrt{|xy|}$  mentre  $v(x, y) \equiv 0$ . In generale le equazioni di Cauchy-Riemann non sono verificate in ogni punto, ma lo sono di certo nell'origine, essendo qui le derivate parziali sempre nulle. Tuttavia se si considera la generica retta  $(x, y) = (\alpha r, \beta r)$  si ha che:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\alpha\beta r^2|}}{(\alpha + i\beta)r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\text{signum}(r)\sqrt{|\alpha\beta|}}{\alpha + i\beta}$$

Che ovviamente non è costante al variare di  $\alpha$  e  $\beta$ , quindi la derivata non esiste.

**Teorema 2.3.** Sia  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ . Se  $\forall z \in \Omega \subset \mathcal{D}$  abbiamo  $u, v \in \mathcal{C}^1$ <sup>1</sup>, allora le condizioni di Cauchy-Riemann sono necessarie e sufficienti affinché  $f$  sia olomorfa in  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Calcoliamo la derivata di  $f$  in  $z$ ; sia  $h = \xi + i\eta$  l'incremento, allora:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

Valutiamo separatamente la parte reale, sviluppando in Taylor abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{u(z+h) - u(z)}{h} &= \frac{u(x+\xi, y+\eta) - u(x, y)}{\xi + i\eta} = \\ &= \frac{u(x, y) + \partial_x u(x, y)\xi + \partial_y u(x, y)\eta + o(\sqrt{\xi^2 + \eta^2}) - u(x, y)}{\xi + i\eta} = \\ &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y u(x, y) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x u(x, y) + \frac{o(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\xi + i\eta} \end{aligned}$$

Analogamente per la parte immaginaria otteniamo:

$$\frac{v(z+h) - v(z)}{h} = \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y v(x, y) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x v(x, y) + \frac{o(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\xi + i\eta}$$

Passando alla forma esponenziale si verifica subito che:

$$\frac{o(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\xi + i\eta} \equiv o(1)$$

Unendo parte reale e parte immaginaria abbiamo:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} &= \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y u(x, y) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x u(x, y) + i \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_y v(x, y) \\ &\quad + i \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x v(x, y) + o(1) = \end{aligned}$$

Usiamo ora le equazioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{aligned} &= i \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_x v(x, y) + \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x u(x, y) + i \frac{\eta}{\xi + i\eta} \partial_x u(x, y) \\ &\quad + i \frac{\xi}{\xi + i\eta} \partial_x v(x, y) + o(1) = \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y) + o(1) \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Con  $\mathcal{C}^n$  indichiamo la classe di funzioni derivabili  $n$  volte con continuità.



Facendo tendere  $h$  a zero:

$$f'(z) = \partial_x u(x, y) + i \partial_x v(x, y)$$

Quindi  $f$  è derivabile, cioè l'asserto.  $\square$

Si può dimostrare che per i numeri complessi valgono le stesse regole di derivazione che sono state viste per i reali, compreso il teorema dell'Hospital e quello della derivata della funzione inversa.

*Osservazione 2.3.* Se  $f$  è una funzione analitica,  $f(z) = f(x + iy) = u(x + iy) + i v(x + iy)$ , allora anche  $f$  è differenziabile, infatti ogni funzione analitica, in quanto scrivibile come serie di numeri complessi, ha parte reale e immaginaria differenziabile, inoltre:

$$\partial_y f(x + iy) = i f'(z) = i \partial_x f(x + iy)$$

che sono le equazioni di Cauchy-Riemann. Quindi *tutte* le funzioni analitiche sono anche olomorfe.



# 3

## INTEGRAZIONE SUL PIANO COMPLESSO

Prima di continuare la trattazione della differenziabilità di funzioni nel piano complesso, sviluppiamo il discorso riguardante l'integrazione, dal quale deriveremo successivamente le proprietà delle funzioni differenziabili.

Per definire una nozione di integrale è necessario, prima di tutto, definire un incremento rispetto al quale calcolare il valore dell'integrale stesso. Questo procedimento è analogo a quello utilizzato per i numeri reali, con la differenza che essendo l'asse reale monodimensionale non si sono trovate ambiguità sulla definizione dell'incremento.

Per i numeri complessi ovviamente non è così. Infatti, poichè essi vivono in un piano, sono possibili infiniti cammini fra due punti, e in generale questi non saranno equivalenti. Poiché l'integrale avviene su dei cammini in un piano, e poichè l'incremento deve comunque essere monodimensionale, la rappresentazione adatta per scrivere l'integrale complesso è quello di un integrale di linea su una curva nel piano di Argand-Gauss.

### 3.1 CURVE COMPLESSE

**Definizione 3.1.** Una *curva* sul piano complesso è un'applicazione continua  $\gamma : \underbrace{[a, b]}_{\subset \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{C}$ . L'immagine dell'applicazione  $\gamma$ :

$$\gamma^* = \{z \in \mathbb{C} : z = \gamma(t), \forall t \in [a, b]\}$$

è detta *sostegno* della curva. Inoltre se vale che

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

allora diremo che  $\gamma$  è una *curva chiusa*.

**Definizione 3.2.** Una curva si dice *regolare* se è di classe  $\mathcal{C}^1$  e la sua derivata non si annulla in nessun punto di  $(a, b)$ . Inoltre  $\gamma$  si dirà *regolare a tratti* se  $\exists t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$ , ordinati in modo che

$$a = t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$$

e tali che  $\gamma$  è regolare su ogni intervallo  $[t_{n-1}, t_n]$ .

**Definizione 3.3.** Sia  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva regolare a tratti definiamo *lunghezza* di  $\gamma$

$$L(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$$

**Definizione 3.4.** Due curve regolari a tratti  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\varphi : [c, d] \rightarrow \mathbb{C}$  si dicono equivalenti se esiste un diffeomorfismo  $p : [a, b] \rightarrow [c, d]$  di classe  $\mathcal{C}^1$  tale che

$$\gamma(t) = \varphi(p(t)) \quad \forall t \in [a, b]$$

Evidentemente due curve equivalenti hanno lo stesso sostegno, inoltre se  $p' > 0$ , e quindi  $p(t)$  è crescente, si avrà  $p(c) = a$  e  $p(d) = b$ , cosicché il primo estremo di  $\gamma$  è anche il primo estremo di  $\varphi$ . Se  $p' < 0$  allora la situazione sarà invertita. Nel primo caso diremo che  $\varphi$  ha lo stesso verso di  $\gamma$ , nel secondo che ha verso opposto.

*Osservazione 3.1.* Osserviamo che la relazione sopra definita è effettivamente una relazione di equivalenza. Potremo quindi dividere l'insieme delle curve regolari a tratti in classi disgiunte di curve equivalenti, potremo quindi passare all'insieme quoziente rispetto alla relazione di equivalenza tra curve, considerando inoltre solo curve orientate.

Parleremo quindi parlare di *cammino orientato*  $\Gamma$ , comprendente tutte le curve equivalenti a una certa curva e con lo stesso verso; quindi se  $\varphi(t)$  è una curva in  $\Gamma$ , diremo che  $\varphi$  è una *rappresentazione parametrica* di  $\Gamma$ .

*Osservazione 3.2.* La definizione di lunghezza di una curva non dipende dal cambio di parametrizzazione, cioè se  $\gamma$  e  $\varphi$  sono curve equivalenti, vale che

$$L(\gamma) = L(\varphi)$$

Definiremo quindi, in virtù dell'osservazione precedente, la lunghezza di un cammino orientato  $\Gamma$  come la lunghezza di una qualsiasi curva rappresentante una parametrizzazione di  $\Gamma$ . Risulta inoltre che se  $\gamma$  e  $\varphi$  sono due curve equivalenti con verso opposto varrà

$$L(\gamma) = -L(\varphi)$$

### 3.2 INTEGRALI DI LINEA

**Definizione 3.5.** Sia  $\gamma$  una curva regolare a tratti, definita dalla parametrizzazione  $\gamma(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ ; sia  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ , tale che il sostegno di  $\gamma$  sia contenuto in  $\mathcal{D}$  e che  $f$  sia ivi continua. Definiamo *integrale* di  $f$  lungo  $\gamma$

$$\int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt$$

L'integrale di linea di una funzione complessa non varia al cambiare della parametrizzazione della curva, vale infatti il seguente teorema.

**Teorema 3.1.** Se  $\gamma$  e  $\varphi$  sono curve equivalenti, allora

$$\int_{\gamma} f = \int_{\varphi} f$$

*Dimostrazione.* Per ipotesi esiste un diffeomorfismo  $p$  tale che:

$$(3) \quad \gamma(t) = \varphi(p(t))$$

si ha

$$\int_{\varphi} f = \int_c^d f(\varphi(r)) \varphi'(r) dr$$

e sostituendo  $r = p(t)$

$$(4) \quad \int_{\varphi} f = \int_{p^{-1}(c)}^{p^{-1}(d)} f(\varphi(p(t))) \varphi'(p(t)) p'(t) dt$$

Ma dalla (3) segue

$$\gamma'(t) = \varphi'(p(t)) p'(t)$$

Quindi possiamo scrivere

$$(5) \quad \int_{\gamma} f = \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt = \int_a^b f(\varphi(p(t))) \varphi'(p(t)) p'(t) dt$$

e, confrontando la (4) con questa espressione otteniamo che  $\int_{\gamma} f = \int_{\varphi} f$   $\square$

### 3.3 INDICI E TEOREMA DI CAUCHY

**Definizione 3.6.** Sia data una curva chiusa  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  e sia  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ , allora, per ogni  $z \in \Omega$  si dice *indice* di  $z$  rispetto alla curva  $\gamma$

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z}$$

Enunciamo ora un teorema il cui significato è piuttosto intuitivo, ma la cui dimostrazione è complessa ed esula dagli scopi di questo libro.

**Teorema 3.2.** Una curva chiusa divide sempre  $\mathbb{C}$  in componenti connesse di cui una sola è illimitata.

**Teorema 3.3.** La funzione  $\text{Ind}_{\gamma}(z)$  definita  $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* = \Omega$  è una funzione olomorfa in  $\Omega$ , a valori interi e assume valore costante su ogni componente connessa in cui è diviso  $\mathbb{C}$ . Inoltre  $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 0$  sulla componente di  $\mathbb{C}$  connessa illimitata.

**Dimostrazione.** Dimostriamo il teorema nel caso particolare di una circonferenza di raggio  $r$  centrata in  $z_0$ . Sia quindi  $\gamma(t) = z_0 + r e^{it}$  con  $t \in [0, 2\pi]$ . Otteniamo

$$\begin{aligned} \text{Ind}_{\gamma}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t) dt}{\gamma(t) - z_0} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{i r e^{it} dt}{r e^{it}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1 \end{aligned}$$

Inoltre se  $t$  varia in  $[0, 2n\pi]$  allora  $\text{Ind}_{\gamma}(z_0) = n$ .  $\square$

Dunque il significato della definizione di indice è il conteggio di quante volte una curva chiusa si avvolge attorno ad un certo punto; per completezza diamo la seguente definizione:

**Definizione 3.7.** Poniamo, per definizione

$$\text{Ind}_{\gamma}(\infty) = 0$$

**Definizione 3.8.** Siano  $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  e  $\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  due curve chiuse, allora queste si dicono omotope se esiste una famiglia continua ad un parametro di curve chiuse  $\gamma_s(t)$ ,  $s \in [0, 1]$ , tali che:

$$\gamma_{s=0}(t) = \gamma_1(t) \quad \text{e} \quad \gamma_{s=1}(t) = \gamma_2(t)$$

Una tale famiglia di curve potrebbe essere, ad esempio,  $\gamma_s(t) = \gamma_1(t)(1-s) + \gamma_2(t)s$

Se prendiamo il caso particolare di due curve omotope  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  una delle quali ha come immagine un punto, per esempio  $\gamma_2 = \text{cost}$ , allora diciamo che  $\gamma_1$  è *omotopa a zero*.

**Definizione 3.9** (Insieme connesso). Sia  $X$  un'insieme, allora diciamo che è connesso se gli unici sottoinsiemi disgiunti la cui unione è  $X$  sono  $\{X, \emptyset\}$ .

**Definizione 3.10** (Insieme semplicemente connesso). Sia  $X$  un insieme connesso, allora diciamo che  $X$  è semplicemente connesso se ogni curva chiusa interamente contenuta in  $X$  è omotopa a zero.

**Definizione 3.11** (Insieme convesso). Un insieme  $X$  si dice convesso se  $\forall z_1, z_2 \in X$  il segmento  $z(t) = z_1(1-t) + z_2 t \in X \quad \forall t \in [0, 1]$ .

È facile notare che se un insieme è convesso, allora è anche semplicemente connesso e di conseguenza anche connesso.

**Teorema 3.4** (Di Cauchy). Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  aperto e  $f : \mathcal{D} \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . Una funzione olomorfa in  $\Omega \subset \mathcal{D}$  semplicemente connesso. Se  $\Gamma$  è un cammino chiuso in  $\Omega$  t.c.

$$\text{Ind}_{\Gamma}(z) = 0 \quad \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$$

allora

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

*Dimostrazione.* Riscriviamo

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma} f(z) dz &= \oint_{\Gamma} u(x, y) + iv(x, y) d(x + iy) \\
 &= \oint_{\Gamma} u(x, y) dx + i \oint_{\Gamma} u(x, y) dy \\
 &\quad + i \oint_{\Gamma} v(x, y) dx - \oint_{\Gamma} v(x, y) dy \\
 &= \oint_{\Gamma} [u(x, y) dx - v(x, y) dy] \\
 &\quad + i \oint_{\Gamma} [u(x, y) dx + v(x, y) dy]
 \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi sono verificate le equazioni di Cauchy-Riemann, ed essendo  $\Omega$  semplicemente connesso, le forme differenziali fra parentesi quadre sono esatte, e dunque il loro integrale lungo un cammino chiuso è nullo.  $\square$

Enunciamo ora due corollari di questo teorema

**Corollario 3.4.1.** *Con le notazioni del teorema precedente, e con  $\overline{C} \setminus \Omega$  è convesso, allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad \forall \gamma \text{ cammino chiuso in } \Omega$$

**Corollario 3.4.2.** *Siano  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  due cammini chiusi omotopi in  $\Omega$  t.c.*

$$\text{Ind}_{\gamma_1}(z) = \text{Ind}_{\gamma_2}(z)$$

*allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz$$

*Dimostrazione.* Per la dimostrazione di questo corollario, osserviamo i cammini rappresentati nella figura 3. Calcoleremo il valore dell'integrale di  $f$  lungo il cammino chiuso  $\Gamma = \gamma_1 \cup c_1 \cup -\gamma_2 \cup -c_1$ . Dal teorema di Cauchy e dal suo corollario otteniamo:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

quindi

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{-\gamma_2} f + \int_{c_1} f + \int_{-c_1} f \\
 &= \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f + \int_{c_1} f - \int_{c_1} f \\
 &= \int_{\gamma_1} f - \int_{\gamma_2} f
 \end{aligned}$$

cioè

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{\gamma_2} f \quad \square$$

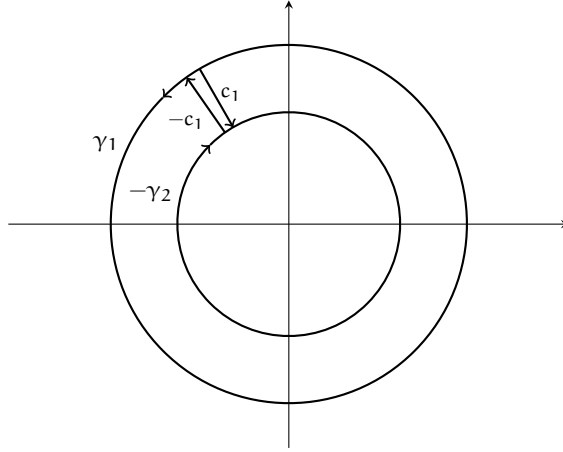


Figura 3: Dimostrazione corollario 3.4.2

**Teorema 3.5** (Formula integrale di Cauchy). *Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa, e sia  $\gamma$  una qualsiasi curva chiusa in  $\Omega$ . Allora  $\forall z \in \Omega \setminus \gamma^*$  abbiamo*

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

*Dimostrazione.* Poniamo

$$g(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} & \forall \xi \neq z \\ f'(z) & \xi = z \end{cases}$$

$g$  è una funzione della variabile complessa  $\xi$  ed è quindi olomorfa in  $\Omega$ . Possiamo applicare il teorema di Cauchy,

$$\int_{\gamma} g(\xi) d\xi = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi = \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \int_{\gamma} \frac{d\xi}{\xi - z} \\ &= \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) 2\pi i \text{Ind}_{\gamma}(z) \end{aligned}$$

otteniamo quindi

$$f(z) \text{Ind}_{\gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

che è la formula cercata. Infine se  $\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$ , cioè se  $\gamma$  è una curva chiusa che effettua un solo giro attorno a  $z$ , la formula integrale di Cauchy si riduce a

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

□



Dalla formula integrale di Cauchy appena dimostrata otteniamo un'importantissima proprietà per le funzioni olomorfe che non ha analoghi per quanto riguarda le funzioni reali.

**Teorema 3.6.** *Sia  $f$  una funzione olomorfa in  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Sia  $\gamma$  un cammino chiuso in  $\Omega$ , allora  $\forall z \in \Omega$  t.c.*

$$\text{Ind}_{\gamma}(z) = 1$$

$f$  è derivabile infinite volte in  $z$  e:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{(n+1)}} d\xi$$

*Dimostrazione.* Il teorema si dimostra per induzione; usando la formula integrale di Cauchy:

$$\begin{aligned} f(z+h) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z - h} d\xi \\ f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \end{aligned}$$

dunque

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i h} \int_{\gamma} \frac{h f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z - h)} d\xi$$

Se facciamo il limite per  $h$  che tende a zero del termine a sinistra questo esiste ed è, per definizione, la derivata di  $f$ , quindi:

$$f'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z - h)} d\xi$$

Notiamo che il teorema sarebbe dimostrato se fosse possibile portare il limite sotto il segno di integrale. Siano:

$$M := \max_{\xi \in \gamma^*} |f(\xi)|$$

$$m := \min_{\xi \in \gamma^*} |\xi - z|$$

per  $h$  piccolo possiamo dire che  $m > h$ ; valutiamo la quantità:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z - h)} d\xi - \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi \right| \leq \\ & \leq \int_{\gamma} \left| \frac{h f(\xi)}{(\xi - z)^2 (\xi - z - h)} \right| d\xi \leq \\ & \leq |h| M \int_{\gamma} \left| \frac{1}{(\xi - z)^2 (\xi - z - h)} \right| d\xi \leq \\ & \leq \frac{|h| M}{m^2(m - |h|)} L(\gamma) \rightarrow 0 \quad \text{per } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Quindi il passaggio del limite sotto il segno di integrale è lecito e dunque:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi$$

Essendo  $f'(z)$  derivabile per come è stata definita, posso iterare il procedimento e giungere alla tesi.  $\square$

Questo teorema è di grande importanza, infatti afferma che basta che una funzione sia olomorfa su un insieme semplicemente connesso perché questa sia ivi infinite volte derivabile.

**Corollario 3.6.1.** *Sia  $f = u + iv$  una funzione olomorfa su  $\Omega$ , allora  $u$  e  $v$  risolvono l'equazione di Laplace*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0 \end{aligned}$$

*Dimostrazione.* Siccome  $f$  è olomorfa

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Per il teorema precedente  $f \in \mathcal{C}^\infty$ , quindi anche  $u, v \in \mathcal{C}^\infty$ , dunque

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

da cui

$$\nabla^2 u = 0$$

La dimostrazione per  $v$  è analoga.  $\square$

Siccome sia  $u$  che  $v$  risolvono le equazioni di Laplace, allora anche:

$$\nabla^2 f = 0$$

Dunque una funzione olomorfa soddisfa l'equazione di Laplace; questo è un fatto di estrema importanza in molti campi della fisica.

**Teorema 3.7** (di Morera). *Se  $f$  è una funzione continua su un insieme  $\Omega$  aperto semplicemente connesso e*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$$

*per ogni  $\gamma$  cammino chiuso interamente contenuto in  $\Omega$ , allora  $f$  è olomorfa in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Siano  $z_0, z \in \Omega$ , e sia

$$F(z) := \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi$$

Siccome l'insieme è connesso, possiamo integrare  $f$  su una curva  $\gamma$  qualsiasi che va da  $z_0$  a  $z$ ; il valore dell'integrale non dipende dalla curva scelta, infatti se prendiamo un'altra curva  $\gamma'$  in  $\Omega$  che va da  $z_0$  a  $z$  per ipotesi

$$\oint_{\gamma-\gamma'} f(z) dz = \int_{\gamma} f(z) dz - \int_{\gamma'} f(z) dz = 0$$

Prendiamo ora un incremento  $h$  in qualsiasi direzione, siccome  $\Omega$  è aperto se  $h$  è sufficientemente piccolo sarà contenuto in  $\Omega$ , quindi  $F$  sarà ben definita in  $z+h$ ; possiamo dunque calcolare la seguente differenza:

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\xi) - f(z)) d\xi \right|$$

Siccome  $f$  è continua  $\forall \varepsilon \exists \delta$  tale che  $|h| < \delta \Rightarrow |f(z+h) - f(z)| < \varepsilon$ ; quindi:

$$\left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\xi) - f(z)) d\xi \right| \leq \frac{1}{h} \int_z^{z+h} |f(\xi) - f(z)| d\xi \leq \frac{1}{h} \varepsilon |h|$$

Facendo tendere  $h$  a zero si ha che  $F'(z) = f(z)$ ; dunque  $F(z)$  è olomorfa su  $\Omega$ , quindi sarà anche derivabile infinite volte, dunque anche  $f$  sarà olomorfa.  $\square$

**Proposizione 3.1.** Sia  $\mathcal{D} \subset \mathbb{C} - \{0\}$  semplicemente connesso, sia  $z_0 \in \mathcal{D}$ , poniamo:

$$f(z) = \int_{z_0}^z \frac{d\xi}{\xi} + \log(z_0)$$

Allora  $f$  è analitica e  $f \equiv \log(z)$

*Dimostrazione.*  $f$  è ben definita essendo  $1/\xi$  una funzione analitica in  $\mathcal{D}$ , e dunque l'integrale dipende solo dagli estremi di integrazione e non dal cammino. Inoltre  $f'(z) = 1/z$ , quindi  $f$  è analitica in  $\mathcal{D}$ .

Prendiamo ora:

$$g(z) := ze^{-f(z)}$$

allora

$$g'(z) = e^{-f(z)} - zf'(z)e^{-f(z)} = 0$$

dunque  $g$  è costante, e siccome  $g(z_0) = 1$  abbiamo

$$e^{f(z)} = z$$

cioè la tesi.  $\square$

**Teorema 3.8** (Del valore medio). *Sia  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa in  $\Omega$  semplicemente connesso; preso un qualsiasi  $\gamma$  cammino chiuso circolare in  $\Omega$  il valore che  $f$  assume al centro della sfera è uguale al valore medio che assume sulla circonferenza.*

*Dimostrazione.* Notiamo che provare la tesi significa dimostrare che

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta$$

Per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z-a} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{i\theta})}{a + re^{i\theta} - a} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta \end{aligned}$$

□

# 4

## SERIE DI LAURENT E TEOREMA DEI RESIDUI

### 4.1 SERIE DI TAYLOR

**Teorema 4.1** (Serie di Taylor). Sia  $f : \mathcal{D} \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  e sia  $\Omega \subset \mathcal{D}$  un sottoinsieme aperto della regione di olomorfia di  $f$  semplicemente connesso, sia  $a \in \Omega$ , allora:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

e la serie converge per ogni  $z$  in ogni disco di centro in  $a$  tutto contenuto in  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Per ipotesi esiste un cammino circolare chiuso  $\gamma$  centrato in  $a$  e contenente  $z$ , dunque:

$$(6) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi$$

Scriviamo:

$$(7) \quad \frac{1}{\xi-z} = \frac{1}{(\xi-a) + (a-z)} = \frac{1}{\xi-a} \frac{1}{1 + \frac{a-z}{\xi-a}}$$

Essendo  $z$  racchiuso nella regione limitata da  $\gamma^*$  e  $\xi$  un punto sulla curva, abbiamo che:

$$\left| \frac{a-z}{\xi-a} \right| < 1$$

Quindi possiamo riscrivere la (7) in termini di una serie geometrica convergente:

$$\frac{1}{\xi-a} \frac{1}{1 + \frac{a-z}{\xi-a}} = \frac{1}{\xi-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^n}$$

Inserendo questo risultato nella (6) otteniamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(\xi)(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi-a)^{n+1}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n \end{aligned}$$

Chiameremo *serie di Taylor* lo sviluppo di  $f$  come sopra. □

Il teorema precedente mostra che le funzioni olomorfe ammettono uno sviluppo in serie di Taylor, cioè uno sviluppo in serie di potenze; ora è evidente l'equivalenza fra funzioni analitiche e olomorfe.

#### 4.2 SERIE DI LAURENT

Con le serie di Taylor abbiamo dimostrato che è possibile sviluppare una qualsiasi funzione complessa nella sua regione di olomorfia  $\Omega$  in un intorno circolare di un punto, a patto che l'intersezione fra l'intorno del punto e  $\Omega$  sia *semplicemente connessa*. Supponiamo ora che  $\Omega$  non sia semplicemente connessa, il teorema seguente mostra che è comunque possibile sviluppare una qualsiasi funzione  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Omega \subset \mathcal{D}$ , in un intorno di un punto in cui  $f$  non è olomorfa.

**Teorema 4.2** (Serie di Laurent). *Sia  $f$  come sopra e continua su due curve circolari chiuse  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  interamente contenute in  $\Omega$ , omotope, delle quali  $\gamma_1$  è la maggiore, allora  $f$  è sviluppabile in serie di potenze sia positive sia negative, convergente in  $\Omega$ , e avrà la forma:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z-a)^n}$$

ove:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(\xi)(\xi-a)^{n-1} d\xi$$

*Dimostrazione.* Colleghiamo  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  tramite un segmento  $c$  e consideriamo la curva  $\Gamma := \gamma_1 \cup c \cup (-\gamma_2) \cup (-c)$ , allora  $\Gamma$  è una curva chiusa intorno alla regione compresa fra le due curve omotope. Per ogni possibile numero  $z$  in questa regione:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi-z} d\xi \end{aligned}$$

Essendosi elisi gli integrali su  $c$  e  $-c$ .

Prendiamo ora in analisi il primo addendo. Poiché  $z$  è contenuto nella regione interna a  $\Gamma$ , possiamo riscrivere:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi-z} &= \frac{1}{(\xi-a) - (z-a)} = \\ &= \frac{1}{\xi-a} \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}} = \\ &= \frac{1}{\xi-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^n} \end{aligned}$$

da cui possiamo ricavare la seguente formula per il primo integrale:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

Con un ragionamento analogo riscriviamo l'integrando del secondo integrale:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= -\frac{1}{z-a} \frac{1}{1 - \frac{\xi-a}{z-a}} = \\ &= -\frac{1}{z-a} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\xi-a)^n}{(z-a)^n} \end{aligned}$$

da cui:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^{n+1}} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(\xi)(\xi-a)^n d\xi$$

Cambiando l'indice della sommatoria di cui sopra in  $n' = n+1$  e sostituendo le formule ricavate per gli integrali abbiamo che

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} (z-a)^n \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi \\ &+ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-a)^n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} f(\xi)(\xi-a)^{n-1} d\xi \end{aligned}$$

Cioè la tesi. □

Per rendere più compatta la scrittura, possiamo scrivere lo sviluppo come:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} d\xi$$

ove  $\gamma$  è una qualunque curva chiusa contenuta fra  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  con indice unitario rispetto ad  $a$ .

Notiamo che se  $a$  è nella regione di olomorfia di  $f$ , allora per il teorema di Cauchy:

$$\int_{\gamma} f(\xi)(\xi-a)^{n-1} d\xi = 0$$

e lo sviluppo di Laurent si riduce alla serie di Taylor.

Inoltre bisogna notare che se lo sviluppo ha potenze negative, i coefficienti  $a_n$  non hanno il significato della derivata di  $f$ , come invece accadeva nella serie di Taylor.

**Osservazione 4.1.** Osserviamo che la serie di Laurent di  $f$  è una somma di termini del tipo

$$f(z) = \underbrace{\cdots + \frac{b_n}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{b_1}{(z-z_0)}}_{I_1} + \underbrace{+ c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots}_{I_2}$$

con  $n \in \mathbb{N}$ .

Chiameremo *componente olomorfa* la componente  $I_2$ , mentre  $I_1$  sarà la *componente caratteristica* o *singolare*, il significato del nome verrà meglio chiarito nel paragrafo successivo.

**Teorema 4.3** (Disuguaglianza di Cauchy). *Sia  $f$  una funzione sviluppabile in serie di Taylor per ogni numero complesso  $z$  contenuto in un disco di raggio  $R$ , allora  $\forall r < R$ , posto*

$$M := \sup_{|z| < r} |f(z)|$$

si ha:

$$|a_n| r^n < M$$

*Dimostrazione.* Per definizione:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \\ |a_n| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(\xi)}{\xi^{n+1}} d\xi \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{it})}{r^{n+1} e^{i(n+1)t}} r e^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{f(re^{it})}{r^n} \right| dt \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{r^n} 2\pi = \frac{M}{r^n} \end{aligned}$$

Da cui la tesi. □

**Teorema 4.4** (Di Liouville). *Sia  $f$  una funzione olomorfa su  $\mathbb{C}$ , allora essa è limitata se e solo se è costante.*

*Dimostrazione.* Che una funzione costante sia limitata è ovvio. Sia allora  $f$  una funzione olomorfa e limitata e sia

$$M := \sup_{|z| < r} f(z) < +\infty$$

Siccome  $f$  è olomorfa  $\forall z \in \mathbb{C}$ , allora si potrà sempre esprimere  $f(z)$  come serie di potenze. Per il teorema precedente deve valere che:

$$|a_n| < \frac{M}{r^n}$$



Siccome la regione di olomorfia di  $f$  è tutto il piano complesso, si può far tendere  $r$  all'infinito, da cui  $|a_n| = 0$ .

Riamane da determinare solo il primo termine dello sviluppo,  $a_0$  però centrando la serie in un punto fisso del piano complesso, possiamo esprimere ogni valore di  $f$  rispetto a quel punto, quindi  $a_0$  ha valore fissato, e quindi  $f$  è costante.  $\square$

### 4.3 ZERI E PUNTI DI SINGOLARITÀ

**Definizione 4.1.** Sia  $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione, diciamo che  $z_0$  è uno zero di  $f$  se  $f(z_0) = 0$ .

Per le funzioni complesse vale il seguente teorema:

**Teorema 4.5.** *Sia  $f$  una funzione analitica in  $\Omega$  diversa dalla funzione identicamente nulla, allora se  $f$  ammette degli zeri in  $\Omega$ , questi sono isolati.*

*Dimostrazione.* Si tratta di dimostrare che se esiste  $z_0 \in \Omega$  t.c.  $f(z_0) = 0$ , allora esiste un disco  $D(z_0, \rho)$ , per un opportuno  $\rho$ , tale che  $f(z) \neq 0 \forall z \in \Omega \cap D(z_0, \rho)$ .

Essendo  $f$  analitica in  $\Omega$ , potrà essere espressa con una serie di potenze centrata in  $z_0$ :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$$

Siccome  $z_0$  è uno zero, dovrà essere  $a_0 = f(z_0) = 0$ , sia allora  $m$  il primo indice tale che  $a_m \neq 0$ ; dunque:

$$f(z) = (z - z_0)^m (a_m + P(z))$$

ove

$$P(z) = \sum_{n=m+1}^{+\infty} a_n (z - z_0)^{n-m}$$

Siccome  $P$  è una funzione analitica (e dunque continua), ed ha uno zero in  $z_0$ , esiste  $\rho$  t.c.  $\forall z$ , t.c.  $0 < |z - z_0| < \rho$ ,  $a_m > P(z)$ , cioè  $f(z) \neq 0$ .  $\square$

Questo teorema ha parecchi risvolti pratici, in quanto ci permette di dire che se  $f$  è una funzione analitica nulla su un'insieme infinito di punti che hanno un punto di accumulazione, allora  $f$  è la funzione identicamente nulla.

Inoltre se  $f(z) = g(z)$ ,  $f, g$  funzioni analitiche, per ogni valore di  $z$  in un dominio con almeno un punto di accumulazione, allora  $\varphi(z) := f(z) - g(z)$  è la funzione identicamente nulla, cioè  $f = g \forall z$ .

Passiamo ora alla classificazione degli zeri; siano  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  come in 4.1, allora diciamo che:

- (i) Se  $a_1 = 0$  e  $a_n \neq 0 \forall n > 1$ ,  $z_0$  è uno zero semplice.
- (ii) Se  $a_1, \dots, a_m = 0$  e  $a_n \neq 0 \forall n > m$ ,  $z_0$  è uno zero di ordine  $m$ .

Nell'ultimo caso vale che

$$f^{(k)}(z_0) = 0 \forall k \leq m$$

**Definizione 4.2** (di singolarità). Diciamo che  $z_0$  è un punto di singolarità per  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  se  $f$  o le sue derivate non sono definite in  $z_0$ .

Per il momento ci limiteremo a trattare le singolarità isolate, ossia quelle singolarità per cui esiste un disco  $D(z_0, \rho)$  in cui  $f(z)$  sia olomorfa per ogni  $z \neq z_0$ .

A partire dall'osservazione 4.2 possiamo classificare i punti nel piano complesso a seconda del comportamento della serie di Laurent di una funzione calcolata in un intorno di tali punti.

**Definizione 4.3.** Sia  $f$  una funzione analitica in un insieme  $\Omega$  escluso eventualmente un punto  $z_0$  interno al dominio.

- (i) Se la componente singolare dello sviluppo di Laurent di  $f$  intorno a  $z_0$  è nulla, allora  $z_0$  verrà detto punto di *olomorfismo*.
- (ii) Se la parte singolare di  $f$  è diversa da zero, allora  $z_0$  sarà un punto di singolarità per  $f$  e
  - Se esiste finito  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ , allora  $z_0$  è una *singolarità eliminabile*.
  - Se la componente singolare ha un numero finito di termini, allora, indicato con  $n$  il primo valore negativo non nullo, si dirà che  $z_0$  è un *polo di ordine  $n$* .
  - Se la componente singolare ha un numero infinito di termini allora si dirà che  $z_0$  è una *singolarità essenziale*.

La condizione di polo di ordine  $n$  si può riscrivere ponendo:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

e dicendo che  $Q(z)$  ha in  $z_0$  uno zero di ordine  $n$  mentre  $P(z_0) \neq 0$ . Dunque se  $z_0$  è un polo di ordine  $n$ :

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

Ma

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^n = b_n$$

Per il limite in punti di singolarità essenziali vale il seguente teorema:

**Teorema 4.6** (di Casorati-Weierstrass). *Sia  $f$  una funzione con una singolarità isolata in  $z_0$ , allora  $\forall \rho, \varepsilon > 0$  e  $\forall a \in \mathbb{C} \exists z \in \mathbb{C} \cap D(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$  tale che  $|f(z) - a| < \varepsilon$ .*

In pratica questo teorema afferma che, l'insieme  $R := \{f(z) : z \in D(z_0, \rho), z \neq z_0\}$  è denso nel piano complesso, dunque il  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  può assumere qualsiasi valore, quindi non esiste.

*Dimostrazione.* Sia  $R$  come sopra, supponiamo, per assurdo, che esista un  $a_0 \in \mathbb{C}$  tale che, per un certo  $\varepsilon > 0$ ,  $D(a_0, \varepsilon) \cap R = \emptyset$ ; allora  $\forall z \in D(z_0, \rho) \quad |f(z) - a_0| > \varepsilon$ , cioè:

$$\left| \frac{1}{f(z) - a_0} \right| < \frac{1}{\varepsilon}$$

La funzione

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - a_0}$$

è dunque analitica, o ha al più una singolarità eliminabile in  $z_0$ . Ma allora

$$f(z) = a_0 + \frac{1}{g(z)}$$

e dunque  $f$  ha al più una singolarità eliminabile in  $z_0$ , assurdo.  $\square$

Dunque la classe limite in un punto di singolarità essenziale è un insieme denso in  $\mathbb{C}$ ; una funzione che assume più valori nello stesso punto verrà chiamata *polidroma*.

Cerchiamo ora di estendere la classificazione dei poli anche per l'infinito. Per mappare il punto all'infinito conviene porre  $z = 1/t$  e definire una nuova funzione  $g(t) = f(1/t)$ ; allora diremo che:

- (i) se  $g$  ha un punto di olomorfismo in zero allora  $f$  ha un punto di olomorfismo all'infinito.
- (ii) Se  $g$  ha una singolarità eliminabile in zero allora  $f$  ha una singolarità eliminabile all'infinito.
- (iii) Se  $g$  ha un polo di ordine  $n$  in zero allora  $f$  ha un polo di ordine  $n$  all'infinito.
- (iv) Se  $g$  ha una singolarità essenziale in zero allora  $f$  ha una singolarità essenziale all'infinito.

Grazie a questa classificazione possiamo estendere il teorema di Liuville a  $\overline{\mathbb{C}}$ .

**Teorema 4.7.** *Se  $f$  è analitica in  $\overline{\mathbb{C}}$ , allora  $f$  è costante.*

*Dimostrazione.* La dimostrazione è analoga a quella già vista.  $\square$

Abbiamo ora gli strumenti necessari per dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra, che è in realtà un corollario del teorema sopra enunciato.

**Teorema 4.8** (Teorema fondamentale dell'algebra). *Per ogni polinomio*

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

*l'equazione  $P(z) = 0$  ha almeno una soluzione.*

*Dimostrazione.* Sia

$$g(z) := \frac{1}{P(z)}$$

Se  $P$  non avesse soluzioni, allora  $g$  sarebbe olomorfa su tutto  $\overline{\mathbb{C}}$ , e dunque sarebbe costante, assurdo.  $\square$

Se invece vogliamo valutare una singolarità non isolata, lo sviluppo di Laurent nell'intorno di tale punto dovrà tenere conto degli infiniti punti di singolarità contenuti, quindi è plausibile che questa singolarità sia essenziale. Questo fatto è enunciato nella seguente proposizione, di cui non viene data la dimostrazione.

**Proposizione 4.1.** *Se  $z_0$  è un punto di singolarità non isolato per  $f$ , allora  $z_0$  è una singolarità essenziale.*

#### 4.4 I RESIDUI

**Definizione 4.4.** Si dice residuo di  $f$  nel punto  $z_0$ , e lo indichiamo con  $\text{Res}_f(z_0)$ , il coefficiente  $b_1$  del teorema 4.2.

L'importanza del *residuo* discende dalle definizioni dei coefficienti della serie di Laurent, infatti:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \oint f(z) dz$$

cioè il residuo esprime il valore dell'integrale della funzione su un cammino attorno al punto considerato. Quindi la trattazione degli sviluppi di Laurent di funzioni complesse è di fondamentale importanza per la possibilità di ottenere l'integrale della funzione valutando solamente un coefficiente della serie.

*Osservazione 4.2.* Osserviamo che se  $f$  ha in  $z_0$  un polo di ordine  $n$ , allora, se indichiamo con  $T(z)$  la parte olomorfa dello sviluppo di  $f$ :

$$f(z) = T(z) + \frac{b_1}{z - z_0} + \cdots + \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

e quindi

$$\text{Res}_f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{dz^{n-1}} \left( (z - z_0)^n f(z) \right) \Big|_{z=z_0}$$

**Teorema 4.9** (dei residui). *Sia  $f$  una funzione analitica nell'insieme semplicemente connesso  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  ad eccezione dei punti  $z_1, \dots, z_n$ ; sia  $\gamma$  una curva chiusa in  $\Omega$  tale che  $z_i \notin \gamma^*$  e  $\text{Ind}_\gamma(z) = 0 \ \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$ , e sia*

$$S = \{z_1, \dots, z_m\} \subseteq \{z_1, \dots, z_n\} = R$$

*l'insieme dei punti interni a  $\gamma^*$ , allora:*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \text{Res}_f(z_j) \text{Ind}_\gamma(z_j)$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $j = 1, \dots, m$  possiamo scrivere:

$$f(z) = T(z) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{(z - z_j)^k} = T(z) + \varphi_j(z)$$

ove  $\varphi_j$  indica la componente singolare di  $f$  rispetto alla  $j$ -esima singolarità e  $T$  la componente olomorfa dello sviluppo.

Sia

$$g(z) := f(z) - \varphi_1(z) - \dots - \varphi_m(z)$$

La funzione  $g$  è ben definita in  $z_j$  per ogni  $j$  poiché è stata rimossa la parte singolare di  $f$  in tali punti. Dunque  $g$  è olomorfa in  $\Omega \setminus \{R \setminus S\}$  e quindi vale il teorema di Cauchy:

$$\oint_{\gamma} g(z) dz = 0$$

cioè

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} f(z) dz - \sum_{j=1}^m \oint_{\gamma} \varphi_j(z) dz &= 0 \\ \oint_{\gamma} f(z) dz &= \sum_{j=1}^m \oint_{\gamma} \varphi_j(z) dz \end{aligned}$$

Notiamo che:

$$\begin{aligned} \oint_{\gamma} \varphi_j(z) dz &= \oint_{\gamma} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} dz = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \oint_{\gamma} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} dz \end{aligned}$$

Per  $n = 1$  abbiamo come risultato:

$$\oint_{\gamma} \frac{b_1}{z - z_j} = 2\pi i \text{Ind}_\gamma(z_j) b_1 = 2\pi i \text{Ind}_\gamma(z_j) \text{Res}_f(z_j)$$

Per  $n > 1$  invece usando il teorema 3.3:

$$\oint_{\gamma} \frac{b_n}{(z - z_j)^n} = \frac{2\pi i}{(n-1)!} \text{Ind}_\gamma(z_j) (b_n)^{(n-1)}(z_j) = 0$$

ove  $(b_n)^{(n-1)}$  indica la derivata di ordine  $n-1$  del coefficiente  $b_n$ , che è ovviamente nulla. Quindi abbiamo che:

$$\oint_{\gamma} \varphi_j(z) dz = 2\pi i \operatorname{Ind}_{\gamma}(z_j) \operatorname{Res}_f(z_j)$$

Quindi

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^m \operatorname{Res}(z_j) \operatorname{Ind}_{\gamma}(z_j)$$

che è la tesi.  $\square$

Estendiamo ora il teorema al caso in cui  $f$  abbia una singolarità all'infinito definendo il residuo all'infinito.

**Definizione 4.5.** Sia  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  connesso e illimitato e sia  $\gamma$  un cammino chiuso tale da non comprendere al suo esterno nessuna singolarità, allora chiameremo il residuo di  $f$  all'infinito:

$$\operatorname{Res}_f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma} f(\xi) d\xi$$

*Osservazione 4.3.* Se  $f$  ha una singolarità all'infinito  $g(t) = f(1/t)$  ha una singolarità in zero, quindi:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{z^n} \\ g(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a'_n t^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b'_n}{t^n} \end{aligned}$$

Il residuo per  $g$  sarà  $-a'_1$ , infatti:

$$\begin{aligned} a'_1 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{g(t) dt}{t^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma} \frac{f(z) dz}{z^{-2} (-z^2)} = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{-\gamma} f(z) dz = -\operatorname{Res}_f(\infty) \end{aligned}$$

Dunque una funzione può essere analitica all'infinito e avere residuo diverso da zero.

Grazie a questa osservazione possiamo estendere il teorema dei residui.

**Teorema 4.10** (dei residui all'esterno). *Sia  $f$  una funzione olomorfa su  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  connesso e illimitato per eccezione di  $n$  punti isolati  $z_1, \dots, z_n$  e  $z = \infty$ , sia  $\gamma$  una curva chiusa tale che gli  $z_i$  siano esterni alla zona racchiusa da  $\gamma^*$ , allora:*

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = -2\pi i \sum_{i=0}^n \operatorname{Res}_f(z_i) - 2\pi i \operatorname{Res}_f(\infty)$$

Da questo teorema e dal teorema 4.4 è immediato il seguente corollario:

**Corollario 4.10.1.** *La somma dei residui su tutti i punti di singolarità di una certa funzione  $f$ , compreso quella all'infinito, è zero.*

## 4.5 LEMMA DI JORDAN

Il teorema dei residui fornisce uno strumento molto potente per il calcolo integrale, utilizzabile anche per l'integrazione in campo reale.

Consideriamo per esempio l'integrale reale:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

Se  $f$  è una funzione di cui in generale non sappiamo calcolare l'integrale nel campo reale, possiamo promuovere  $f$  ad una funzione complessa; avremmo allora:

$$I = \int_{\text{Re}(z)} f(z) dz$$

in questo caso  $\text{Re}(z)$  indica tutto l'asse reale, da meno a più infinito, possiamo immaginare di rendere esplicito il passaggio all'infinito in forma simmetrica tramite il limite

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(z) dz$$

Grazie alla simmetria del passaggio al limite possiamo ora prendere una semicirconferenza  $C_R$  centrata in zero e di raggio  $R$  tale che la curva  $\Gamma = [-R, R] \cup C_R$ , percorsa in senso antiorario, sia una curva chiusa; allora avremmo che

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz$$

Facciamo ora un'ipotesi fondamentale, che tornerà utile quando si dovranno affrontare vari integrali indefiniti, fra cui le trasformate di Fourier, poniamo:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$$

allora, se indichiamo con  $z_j$  tutte le singolarità di  $f$  nel semipiano con parte immaginaria positiva, utilizzando il teorema dei residui possiamo scrivere

$$I = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(z) dz = \lim_{R \rightarrow +\infty} \oint_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_j \text{Res}_f(z_j)$$

Sebbene le ipotesi utilizzate siano piuttosto restrittive, esse si applicano comunque ad un gran numero di casi di grande rilevanza; come mostra il seguente lemma.

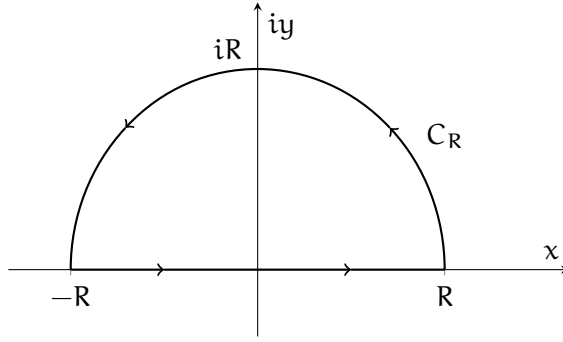


Figura 4: Lemma di Jordan

**Lemma 3** (di Jordan). *Sia  $f$  una funzione analitica nel semipiano complesso superiore, in una regione esterna ad una semicirconfenza di raggio  $R_0$ ; cioè  $f(z)$  è analitica in  $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) \geq 0 \vee |z| \geq R_0\}$ . Inoltre valga*

$$|f(z)| \geq k|z|^\alpha \quad \text{con} \quad \alpha \in \mathbb{R}^+$$

*Quindi, se  $C_R$  è una semicirconfenza posta nel semipiano superiore, come in figura 4, e  $\lambda$  è un numero reale positivo, varrà che*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} \frac{1}{f(z)} e^{i\lambda z} dz = 0$$

**Lemma 4** (Lemma di Jordan: enunciato II). *Sia  $f(z)$  una funzione analitica che si annulla all'infinito nel semipiano superiore, cioè*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} f(Re^{i\vartheta}) = 0, \quad \forall \vartheta \in [0, \pi]$$

*e  $\alpha$  un numero reale positivo. Allora si ha*

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{i\alpha z} dz = 0,$$

*ove  $C_R = \{z : |z| = R, 0 \leq \arg(z) \leq \pi\}$  è una curva come in figura 4.*

*Dimostrazione.* Iniziamo riscrivendo l'integrale utilizzando la notazione esponenziale, quindi  $z = Re^{i\vartheta}$  e  $dz = Ri d\vartheta e^{i\vartheta}$ . Sostituendo otteniamo

$$\left| \int_0^\pi \frac{1}{f(Re^{i\vartheta})} e^{i\lambda Re^{i\vartheta}} Re^{i\vartheta} d\vartheta \right| \leq \int_0^\pi \left| \frac{1}{f(Re^{i\vartheta})} e^{i\lambda Re^{i\vartheta}} R d\vartheta \right|$$

quindi, per le ipotesi fatte in precedenza possiamo maggiorare ulteriormente l'integrale, ottenendo

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{R}{|f(Re^{i\vartheta})|} |e^{i\lambda Re^{i\vartheta}}| d\vartheta &\leq R \int_0^\pi \frac{1}{kR^\alpha} |e^{i\lambda R(\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))}| d\vartheta \\ &= \frac{R}{k} \int_0^\pi \frac{1}{R^\alpha} |e^{i\lambda R \cos \vartheta}| |e^{-\lambda R \sin \vartheta}| d\vartheta \end{aligned}$$



infine, possiamo notare che il termine  $e^{-\lambda R \sin(\vartheta)}$  è positivo e simmetrico rispetto all'angolo di  $\pi/2$ . Con questa osservazione l'integrale diventa

$$\frac{1}{k} R^{1-\alpha} 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \sin \vartheta} d\vartheta$$

giunti a questa espressione possiamo maggiorare ulteriormente il termine esponenziale osservando che nell'intervallo  $[0, \pi/2]$  si ha:  $\sin(\vartheta) > \frac{2}{\pi}\vartheta$ , cioè

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_R} \frac{1}{f(z)} e^{i\lambda z} dz \right| &\leq \frac{1}{k} R^{1-\alpha} 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\lambda R \frac{2}{\pi} \vartheta} d\vartheta \\ &= \frac{1}{k} R^{1-\alpha} 2 \frac{\pi}{2\lambda R} [e^{-\lambda R} - 1] \\ &= \frac{\pi}{k\lambda R^\alpha} [e^{-\lambda R} - 1] \end{aligned}$$

ed essendo  $\lambda$  e  $\alpha$  positivi, l'ultimo termine converge a zero, il lemma risulta quindi dimostrato.  $\square$

È elementare estendere questo lemma al caso in cui  $\lambda$  sia un numero reale negativo, in quanto la dimostrazione è analoga purché si prenda la semicirconferenza inferiore anziché quella superiore.



# 5

## ALTRE PROPRIETÀ DELLE FUNZIONI

### 5.1 PROLUNGAMENTO ANALITICO

**Definizione 5.1** (Prolungamento analitico). Sia  $f_1$  una funzione analitica in  $\Omega_1$  e  $f_2$  una funzione analitica in  $\Omega_2$  tali che  $\Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$  e  $f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ ; allora diciamo che  $f_2$  è il prolungamento analitico di  $f_1$  in  $\Omega_2$  o analogamente che  $f_1$  è il prolungamento analitico di  $f_2$  in  $\Omega_1$ .

*Esempio 5.1* (Principio di riflessione di Schwarz). Sia  $f$  una funzione analitica su  $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \vee \text{Im}(z) \geq 0\}$  tale che  $f(z) \in \mathbb{R} \forall z \text{ t.c. } \text{Im}(z) = 0$ . Ci chiediamo se è possibile prolungare  $f$  anche sull'insieme simmetrico di  $\Omega$  rispetto all'asse reale  $\Omega^* := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \vee \text{Im}(z) \leq 0\}$ .

Siccome  $f$  è analitica,  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ , quindi  $\overline{f(\bar{z})} = f(z) \forall z \in \Omega$ ; quindi, l'insieme degli  $\bar{z}$  tali che  $z \in \Omega$  è proprio  $\Omega^*$ , dunque basta definire la funzione

$$g(z) := \begin{cases} f(z) & z \in \Omega \\ \overline{f(\bar{z})} & \bar{z} \in \Omega \end{cases}$$

che sarà ben definita su tutto  $\Omega$  e  $\Omega^*$ .

Ovviamente il discorso si può generalizzare ad una qualsiasi funzione  $f$  che abbia valori reali sull'asse reale olomorfa su un qualsiasi dominio.

**Teorema 5.1** (Unicità del prolungamento). Siano  $f, f_1, f_2$  tre funzioni analitiche sugli insiemi semplicemente connessi  $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$  rispettivamente, tali che

$$\begin{aligned} \Omega \cap \Omega_1 &\neq \emptyset \\ \Omega \cap \Omega_2 &\neq \emptyset \\ \Omega_2 \cap \Omega_1 &\neq \emptyset \\ \Omega_1 \cap \Omega_2 \cap \Omega &\neq \emptyset \end{aligned}$$

e  $f_1$  e  $f_2$  sono il prolungamento di  $f$  in  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  rispettivamente.

Allora  $f_1(z) = f_2(z) \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ .

*Dimostrazione.* Essendo  $f_1$  e  $f_2$  il prolungamento di  $f$ , allora per ogni  $z \in \Omega \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$ ,  $f(z) = f_1(z) = f_2(z)$ . Sia

$$\varphi(z) := f_1(z) - f_2(z)$$

Allora  $\varphi$  è analitica in  $\Omega_1 \cap \Omega_2$  essendo composta di funzioni ivi analitiche; tuttavia sarà anche  $\varphi(z) = 0 \forall z \in \Omega \cap \Omega_1 \cap \Omega_2$ , quindi per il teorema 4.5  $\varphi(z) \equiv 0 \forall z \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ ; da cui la tesi.  $\square$

Se togliessimo l'ipotesi

$$\Omega \cap \Omega_1 \cap \Omega_2 \neq \emptyset$$

allora il teorema non sarebbe valido, in quanto potrebbe capitare che fra i tre insieme cada una singolarità, ed essendo dunque  $f$  polimorfa in quel punto, non si potrebbero unire  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ .

## 5.2 PROLUNGAMENTO ANALITICO TRAMITE SVILUPPO IN SERIE

Sia  $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$  una funzione olomorfa sviluppata in serie di Taylor in  $\Omega$  insieme limitato e semplicemente connesso. Siccome la regione  $\Omega$  è limitata, questo può essere dovuto al fatto che:

- (i)  $\partial\Omega$  sono tutti punti di singolarità, e dunque non è possibile estendere  $f$  al di fuori di  $\Omega$ .
- (ii) Le singolarità su  $\partial\Omega$  sono isolate e dunque è possibile estendere  $f$  al di fuori della regione di olomorfia.

Un metodo comodo, dovuto a Weierstrass, per estendere la regione di olomorfia è centrarsi in un punto vicino al bordo e sviluppare la funzione in serie all'interno di un disco; se lo sviluppo non incontra singolarità troppo presto, allora il disco uscirà da  $\Omega$ , e avremo così esteso al regione di olomorfia di  $f$ .

Questo procedimento può essere iterato all'infinito con una concatenazione di cerchi di convergenza. Possiamo usare queste semplici osservazioni per dimostrare il seguente teorema:

**Teorema 5.2.** *Se lo sviluppo in serie di Taylor di una funzione  $f$  in un intorno del punto  $z_0$  ha raggio di convergenza  $r$  finito e  $r$  è la massima estensione del raggio di convergenza, allora  $f$  ha almeno una singolarità sul bordo di equazione  $|z - z_0| = r$ .*

*Dimostrazione.* Se così non fosse, si potrebbe usare il metodo di prolungamento visto in precedenza per estendere la zona di olomorfia di  $f$  oltre ogni punto del disco  $D(z_0, r)$ , contro l'ipotesi che  $r$  è il massimo raggio di convergenza della serie.  $\square$

## 5.3 PUNTI DI DIRAMAZIONE

Abbiamo già visto nel secondo capitolo che nel campo complesso esistono funzioni che sono naturalmente polidrome, quali i logaritmi e, di conseguenza, le radici. Notiamo che il termine funzione polidroma è fortemente antitetico, poiché per definizione stessa di funzione l'immagine deve essere unica per ogni valore in entrata nella

funzione; quindi parte della trattazione che seguirà sarà dedicata a come ricondurre queste funzioni polidrome in funzioni vere e proprie. Inoltre, proprio perché l'immagine di ogni singolo numero complesso non è il singleton, una funzione polidroma non potrà essere analitica. Incominciamo con un esempio:

*Esempio 5.2.* Consideriamo la funzione  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto \sqrt[2]{z}$ , in rappresentazione polare possiamo scrivere, come già visto:

$$\sqrt{z} = \sqrt{\rho} e^{\frac{i\theta + i2k\pi}{2}}$$

cioè

$$\arg(\sqrt{z}) = \frac{i\theta + i2k\pi}{2}$$

che chiaramente non è univocamente determinata, infatti la funzione ha un salto per  $\theta = 0$  tale per cui, fissato  $\rho$ :

$$\begin{aligned} f(\theta = \varepsilon) &= \sqrt{\rho} e^{\frac{i\varepsilon}{2}} \\ f(\theta = 2\pi - \varepsilon) &= \sqrt{\rho} e^{\frac{i(2\pi - \varepsilon)}{2}} = -\sqrt{\rho} e^{\frac{i\varepsilon}{2}} \end{aligned}$$

per cui facendo tendere  $\varepsilon$  a zero nel primo caso, cioè se ci avviciniamo all'asse reale tenendo la parte immaginaria positiva:

$$\lim_{z \rightarrow \sqrt{\rho}} f(z) = \sqrt{\rho}$$

se invece ci avviciniamo tenendo la parte immaginaria negativa avremo:

$$\lim_{z \rightarrow \sqrt{\rho}} f(z) = -\sqrt{\rho}$$

Notiamo che questa è lo stesso genere di ambiguità che si ottiene per radici di funzioni a valori reali.

Inoltre notiamo che la  $f$  è una funzione non analitica sia all'infinito che in zero, poiché in questi punti la derivata è divergente. Queste singularità sono però diverse da quelle incontrate finora, e lo si nota perché la funzione  $f$  non è sviluppabile in zero in serie di Laurent. Per comprendere meglio cosa accade, calcoliamo:

$$\oint_{|z|=r} f(z) dz = \mp \frac{4r^{3/2}}{3} \neq 0$$

Come ci si attende per un integrale chiuso intorno ad una singolarità, il risultato è diverso da zero, tuttavia notiamo che il valore assunto dall'integrale dipende da  $r$ , e quindi possiamo dedurre che non esiste una corona circolare centrata nell'origine in cui  $f$  è analitica, altrimenti, avremmo che qualsiasi integrale lungo il cammino chiuso  $|z| = r$  contenuto nella corona circolare avrebbe come valore  $\text{Res}_f(0)$ , indipendentemente da  $r$ .

Questi particolari punti di singolarità sono detti *punti di diramazione*.

**Definizione 5.2** (Punti di diramazione). Sia  $f$  una funzione a valori complessi,  $z_0$  un punto nel piano complesso e  $\gamma$  un qualsiasi cammino tale che  $\text{Ind}_\gamma(z_0) \neq 0$  (cioè un cammino che racchiuda  $z_0$ ). Diremo che  $z_0$  è un *punto di diramazione* per la funzione se  $f$  è polidroma su  $\gamma$ .

Mostriamo il significato di questa definizione con un semplice esempio:

*Esempio 5.3.* Analizziamo il comportamento della funzione:  $f(z) = \sqrt{z^2 - 1} = \sqrt{(z+1)(z-1)}$ . La radice si annulla in  $z = 1$  e in  $z = -1$ , prendiamo questi due punti come riferimento per fissare delle nuove coordinate,

$$\begin{cases} z-1 = \rho_1 e^{i\vartheta_1} \\ z+1 = \rho_2 e^{i\vartheta_2} \end{cases}$$

notiamo che il sistema di coordinate scelto è ridondante, in quanto contiene quattro parametri; otteniamo così:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sqrt{(z-1)(z+1)} = \sqrt{\rho_1 \rho_2 e^{i\vartheta_1} e^{i\vartheta_2}} \\ &= \sqrt{\rho_1 \rho_2 e^{i(\vartheta_1 + \vartheta_2) + 2ik\pi}} \end{aligned}$$

abbiamo dunque i seguenti due possibili valori per la funzione:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \\ f_2(z) &= \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\pi} \end{aligned}$$

Mostriamo ora il comportamento della funzione attorno ai punti  $\pm 1$ ; iniziamo col scegliere la determinazione  $f_1$  della funzione (la scelta è arbitraria), e percorriamo un cammino chiuso intorno a  $z = 1$  ma che non giri intorno a  $z = -1$  (possiamo pensare ad esempio ad una circonferenza centrata in  $z = 1$ , di raggio  $\rho_1 = 1$ ). In questo modo, percorrendo la curva a partire da un qualsiasi punto iniziale sulla circonferenza si arriva alla seguente determinazione delle variabili:

$$\begin{cases} \rho_1 \rightarrow \rho_1 \\ \rho_2 \rightarrow \rho_2 \\ \vartheta_1 \rightarrow \vartheta_1 + 2\pi \\ \vartheta_2 \rightarrow \vartheta_2 \end{cases}$$

Cioè, avendo scelto la determinazione  $f_1$  per la funzione, otteniamo:

$$f_1(z) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \rightarrow \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i\pi} = f_2(z)$$

si passa quindi alla determinazione  $f_2$ . Abbiamo quindi mostrato che la funzione è polidroma intorno al punto  $z = 1$ , cioè che  $1$  è un *punto di diramazione* per la funzione  $f$ . I Cammini chiusi con i quali la funzione passa da una determinazione all'altra sono detti *cicli di polidromia*. Analogamente si può mostrare che  $z = -1$  è un'altro punto di diramazione.

Per il punto di diramazione all'infinito basta scegliere un percorso chiuso che giri attorno a tutti i punti di diramazione al finito. Nel nostro esempio otteniamo:

$$\begin{cases} \rho_1 \rightarrow \rho_1 \\ \rho_2 \rightarrow \rho_2 \\ \vartheta_1 \rightarrow \vartheta_1 + 2\pi \\ \vartheta_2 \rightarrow \vartheta_2 + 2\pi \end{cases}$$

cioè

$$f_1(z) = \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2)} \rightarrow \sqrt{\rho_1 \rho_2} e^{\frac{i}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) + 2\pi i} = f_1(z)$$

In questo caso abbiamo che un ciclo intorno all'infinito è un *ciclo di monodromia*.

La polidromia di alcune funzioni sul piano complesso ci spinge a cercare una diversa definizione di quest'ultime in modo da evitare indeterminazioni, questo può essere fatto a patto di ridurre il dominio di definizione attraverso degli opportuni *tagli* che impediscano ai cicli di polidromia di chiudersi.

**Definizione 5.3** (di taglio). Si dice *taglio* una qualsiasi linea sul piano complesso che connette due punti di diramazione.

La definizione di taglio fornisce un importante aiuto nel superare la polidromia delle funzioni, infatti ridefinendo il dominio di una funzione ed escludendone un *taglio* qualsiasi (eventualmente si possono usare anche una o più linee che si chiudano all'infinito) la funzione restituisce singoli valori in quanto non è più possibile compiere cicli di polidromia; a questo punto occorre solamente scegliere una delle possibili definizioni della funzione, come visto nell'esempio precedente, per aggirare completamente le difficoltà della polidromia e rendere la funzione analitica.

**Definizione 5.4.** Chiamiamo valore principale il ramo corrispondente alla determinazione per cui  $|\arg(z)| < 2\pi$ .

Le diverse determinazioni su cui è definita una funzione polidroma possono essere ben separate tramite dei tagli, possiamo allora immaginare di avere tante superfici, ognuna corrispondente ad un piano complesso, quanti sono i rami della funzione in cui quest'ultima è monodroma e di connetterle lungo i tagli in modo da avere una corrispondenza non solo biunivoca, ma anche continua, fra i valori della funzione e le singole superfici. Tali superfici sono dette superfici di Riemann.

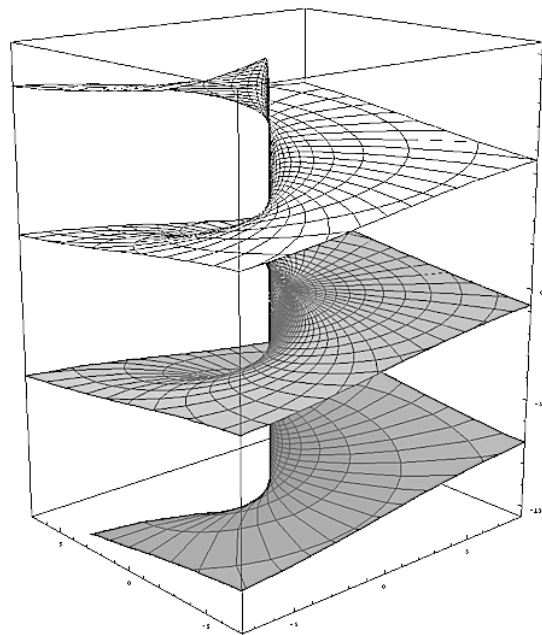


Figura 5: Superficie di Riemman per il logaritmo



## Parte II

# Spazi di Hilbert



# 6

## LA MISURA DI LEBESGUE

Lo scopo di questa sezione è presentare la teoria e le applicazioni degli spazi di Hilbert. Uno dei principali esempi di questo tipo di spazi è quello delle funzioni integrabili secondo Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$ , per questo motivo inizieremo con un capitolo introduttivo presentando la teoria della misura di Lebesgue.

### 6.1 INTRODUZIONE

Verso la fine del diciannovesimo secolo incominciò a essere chiaro a molti matematici che l'integrazione secondo Riemman doveva essere rimpiazzata da un integrale più flessibile, capace di trattare i processi al limite in maniera più rigorosa; fra le varie proposte fu la costruzione di Lebesgue quella che ebbe più successo. In breve, possiamo dire che l'integrale di Riemman su un intervallo  $[a, b]$  può essere approssimato tramite una sommatoria del tipo

$$\sum_{i=0}^n f(x_i)m(E_i)$$

ove  $E_1, \dots, E_n$  sono intervalli disgiunti tali che  $\bigcup_{i=1}^n E_i = [a, b]$ ,  $m$  è la misura degli  $E_i$  e  $x_i \in E_i$ . Lebesgue scoprì che si poteva ottenere una teoria di integrazione più generale se gli  $E_i$  appartenevano ad una classe più generali di insiemi, detti *insiemi misurabili*, e se  $f$  apparteneva ad una classe di funzioni detta di *funzioni misurabili*.

Il punto cruciale della teoria di Lebesgue è che l'unione di ogni famiglia numerabile di insiemi misurabili è a sua volta misurabile, e che

$$m(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots) = m(E_1) + m(E_2) + m(E_3) + \dots$$

a patto che gli  $\{E_i\}$  siano disgiunti. Questa proprietà è detta numerabile additività, ed è una proprietà di cui non godeva l'integrale di Riemman.

Noi tratteremo nel dettaglio l'integrazione di funzioni da  $\mathbb{R}$  in  $\mathbb{R}$ , anche se la teoria può essere ampliata agli insiemi misurabili<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Gli insiemi su cui è possibile definire una  $\sigma$ -algebra

## 6.2 I FONDAMENTI DELLA TEORIA

**Definizione 6.1.** Sia  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , chiamiamo funzione caratteristica, o funzione indicatrice, di  $[a, b]$ , la funzione:

$$\chi_{[a,b]} = \begin{cases} 1 & x \in [a, b] \\ 0 & x \notin [a, b] \end{cases}$$

**Definizione 6.2.** Una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  si dice a gradini se può essere scritta come combinazione lineare finita di funzioni caratteristiche sugli intervalli  $[a_j, b_j)$  tali che  $\bigcup_{j=1}^n [a_j, b_j) = [a, b]$ ; in formule:

$$f = \sum_{j=1}^n \lambda_j \chi_{[a_j, b_j)}$$

Come si nota la definizione di una funzione a gradini dipende da come si decide di ripartire l'intervallo  $[a, b]$ , tuttavia esiste una partizione naturale, cioè quella che considera gli intervalli  $[a_j, b_j)$  separati dai punti di discontinuità di  $f$ . Quando  $f$  è scritta secondo tale ripartizione diciamo che è scritta nella sua *rappresentazione base*.

*Osservazione 6.1.* Le funzioni a gradini godono delle seguenti evidenti proprietà:

- (i) L'insieme delle funzioni a gradini forma uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$  rispetto alla somma di funzioni e al prodotto di una funzione per uno scalare.
- (ii) L'insieme delle funzioni a gradino è chiuso rispetto alle traslazioni; vale a dire, se  $\tau_z$  è l'operatore di traslazione

$$(\tau_z f)(x) = f(x - z)$$

ed  $f$  è una funzione a gradini, allora  $(\tau_z f)$  è una funzione a gradini.

- (iii) Se  $f$  è a gradini, allora  $|f|$  è a gradini.

**Definizione 6.3** (Integrale di una funzione a gradini). Sia:

$$f = \sum_{i=0}^n \lambda_i \chi_{[a_{i+1} - a_i]}$$

una funzione a gradini, diciamo integrale di  $f$  la quantità:

$$\int f = \sum_{i=0}^n \lambda_i (a_{i+1} - a_i)$$

L'integrale di una funzione a gradini gode delle seguenti semplici proprietà:

**Proposizione 6.1.** Siano  $f$  e  $g$  due funzioni a gradini, allora:

(i)

$$\int (\alpha f + \beta g) = \alpha \int f + \beta \int g$$

(ii) Se  $f \leq g$ 

$$\int f \leq \int g$$

(iii)

$$\left| \int f \right| \leq \int |f|$$

(iv)  $\forall z \in \mathbb{R}$ 

$$\int (\tau_z f) = \int f$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo come esempio solo la (ii). Siano  $\{c_i\}$  i punti di discontinuità sia di  $f$  che di  $g$ , allora è possibile scrivere

$$f = \sum_{i=0}^n \alpha_i \chi_{[c_{i+1}-c_i]}$$

$$g = \sum_{i=0}^n \beta_i \chi_{[c_{i+1}-c_i]}$$

Per ipotesi, su ciascuno di questi intervalli abbiamo  $\alpha_i \leq \beta_i$ , da cui:

$$\int f = \sum_{i=0}^n \alpha_i (c_{i+1} - c_i) \leq \sum_{i=0}^n \beta_i (c_{i+1} - c_i) = \int g$$

Cioè la tesi. □

Grazie alla teoria delle funzioni a gradino, siamo in grado di riformulare, senza alterarne il significato, la definizione di integrale secondo Riemman:

**Definizione 6.4** (Integrale di Riemman). Sia  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione limitata, se per ogni  $s$  e  $t$  funzioni a gradini tali che

$$s(x) \leq f(x) \leq t(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

$\exists I \in \mathbb{R}$  tale per cui

$$\int_a^b s \leq I \leq \int_a^b t$$

Allora diciamo che  $f$  è Riemman integrabile su  $[a, b]$  e poniamo:

$$I =: \int_a^b f$$

Diamo ora la definizione di integrale di Lebesgue, che, come si noterà, è immediatamente estendibile a domini illimitati.

**Definizione 6.5** (Integrale di Lebesgue). Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , allora diciamo che  $f$  è integrabile secondo Lebesgue se esiste una successione  $\{f_n\}$  di funzioni a gradini tali che:

(i)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| < +\infty$$

(ii)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \quad \forall x \text{ t.c. } \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$$

In tal caso poniamo:

$$\int f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n$$

D'ora in avanti, se non sarà specificato altrimenti, ogni funzione integrabile sarà intesa come Lebesgue-integrabile, inoltre lo spazio delle funzioni reali integrabili secondo Lebesgue sarà indicato con  $L^1(\mathbb{R})$ .

Se abbiamo trovato una successione di funzioni  $\{f_n\}$  tale per cui valgono le ipotesi della definizione 6.5, scriveremo in breve:

$$f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

Il significato di tale espressione verrà chiarito in seguito.

Enunciamo alcune proprietà dell'integrale di Lebesgue, che rendono la definizione di integrale una definizione ben posta.

**Teorema 6.1.** Sia  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  e  $f \geq 0$ , allora:

$$\int f \geq 0$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione di questo teorema, di per sé intuitivo, viene tralasciata. □

**Teorema 6.2.** Se  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  e  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ , allora:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int g_n$$

*Dimostrazione.* Per le ipotesi:

$$0 \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n - g_n$$

per il teorema precedente abbiamo che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \int g_n \geq 0$$

Tuttavia essendo anche

$$0 \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} g_n - f_n$$

vale che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int g_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n \geq 0$$

Da cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int g_n - \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n = 0$$

□

**Teorema 6.3.** Sia  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ , allora anche  $|f|$  è integrabile e

$$\left| \int f \right| \leq \int |f| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n|$$

*Dimostrazione.* Sia

$$s_n := \sum_{i=0}^n f_i$$

allora  $\forall x$  t.c.  $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| < +\infty$

$$f = \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n \quad \text{e} \quad |f| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |s_n|$$

o equivalentemente

$$|f| = |s_1| + (|s_2| - |s_1|) + (|s_3| - |s_2|) + \dots$$

Definiamo  $g_n := |s_n| - |s_{n-1}|$  e  $g_0 = 0$ ; è immediato notare che queste sono tutte funzioni a gradino e

$$|f| = \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$$

Inoltre poichè  $g_n \leq |s_n - s_{n-1}| = |f_n|$  avremo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int g_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n|$$

Per cui  $|f| \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$  sullo stesso insieme su cui abbiamo che  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  e

$$\left| \int f \right| = \left| \int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| \leq \int \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| = \int |f| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n|$$

Che completa la dimostrazione. □

**Teorema 6.4.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $\forall \varepsilon > 0 \exists \{f_n\}$  successione di funzioni a gradino tali che

$$f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad e \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| \leq \int |f| + \varepsilon$$

*Dimostrazione.* Sia  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} g_n$ , ove  $\{g_n\}$  è un'albitraria espansione di  $f$ ; per costruzione deve esistere  $n_0 \in \mathbb{N}$  tale per cui

$$\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \int |g_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

allora

$$\int |g_0 + \dots + g_{n_0}| - \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \int |g_n| \leq \int |f|$$

Definiamo  $f_0 = g_0 + \dots + g_{n_0}$  e  $f_n = g_{n_0+n-1}$ ; ovviamente  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  e per la disuguaglianza precedente

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| &= \int |g_0 + \dots + g_{n_0}| + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \int |g_n| \leq \\ &\leq \int |f| + 2 \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \int |g_n| \leq \int |f| + \varepsilon \end{aligned}$$

□

Cerchiamo ora di estendere la definizione di funzione integrabile secondo Lebesgue a serie di funzioni integrabili.

**Definizione 6.6.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e sia  $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R})$ , se:

(i)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| < +\infty$$

(ii)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{t.c.} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| < +\infty$$

allora  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$

Verifichiamo che la definizione appena data ha lo stesso significato della 6.5 .

**Teorema 6.5.** Se  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ , con  $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R})$ , allora  $f$  è integrabile e

$$\int f = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n$$



*Dimostrazione.* Siccome ogni  $f_n$  è integrabile esistono  $\{f_{n,k}\}$ , successioni di funzioni a gradini tali che:

$$f_n \simeq \sum_{k=0}^{+\infty} f_{n,k}$$

Per il teorema 6.4 possiamo scegliere la successione  $\{f_{n,k}\}$  in modo tale che

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \int |f_{n,k}| \leq \int |f_n| + 2^{-n}$$

Allora si può scrivere

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n,k=0}^{+\infty} f_{n,k} =: \sum_{m=0}^{+\infty} h_m$$

con  $\{h_m\}$  funzioni a gradino. La serie  $\sum_{m=0}^{+\infty} h_m$  converge perché, per ipotesi:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| < +\infty \quad \text{e} \quad \forall n \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \int |f_{n,k}| < +\infty$$

Inoltre si può osservare che:

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \int |h_m| = \sum_{n,k=0}^{+\infty} \int |f_{n,k}| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \int |f_n| + 2^{-n} \right)$$

che è limitato per ipotesi. Possiamo allora dire che  $f \simeq h_m$ , e dunque:

$$\int f = \sum_{m=0}^{+\infty} \int h_m = \sum_{n,k=0}^{+\infty} \int f_{n,k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int f_n$$

che è la tesi. □

**Definizione 6.7** (Funzione nulla). Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione integrabile. Diremo che  $f$  è una funzione nulla se  $\int |f| = 0$ .

Dalla definizione si evince direttamente che la funzione identicamente nulla è solo un caso particolare, ma non l'unico, di funzione nulla.

**Teorema 6.6.** Se  $f$  è una funzione nulla e  $|g| \leq |f|$ , allora  $g$  è una funzione nulla.

*Dimostrazione.* Osserviamo che basta dimostrare che

$$g \simeq |f| + |f| + \dots$$

Infatti, essendo  $f$  una funzione nulla, ovviamente:  $\int |f| + \int |f| + \dots = 0 < +\infty$ . Inoltre se la serie delle  $f(x) + f(x) + \dots$  converge assolutamente per qualche  $x \in \mathbb{R}$ , allora necessariamente  $f(x) = 0$ . Ma

dall'ipotesi che  $|g| \leq |f|$  varrà anche:  $g(x) = 0$ . Quindi per ognuno di questi  $x$  abbiamo:  $g(x) = f(x) + f(x) + \dots$ .

Sono quindi soddisfatte le condizioni della definizione 6.5 e cioè vale l'uguaglianza scritta sopra, dalla quale ricaviamo che  $g$  è integrabile e ovviamente  $\int |g| = 0$ .  $\square$

Se  $f$  è tale che  $\int |f| = 0$ , e poichè  $f \leq |f|$ , abbiamo come conseguenza immediata di questo teorema il seguente corollario:

**Corollario 6.6.1.** *Una funzione nulla è sempre integrabile.*

**Definizione 6.8.** Date due funzioni  $f$  e  $g$  diremo che  $f$  è equivalente a  $g$  se

$$\int |f - g| = 0$$

e scriveremo  $f \simeq g$ .

*Osservazione 6.2.* È immediato verificare che la relazione definita sopra è effettivamente una relazione di equivalenza. Inoltre possiamo osservare che se  $g \equiv 0$  è la funzione identicamente nulla, una qualsiasi funzione nulla  $f$  è equivalente alla funzione  $g$ .

Grazie alla relazione di equivalenza appena definita possiamo dividere lo spazio  $L^1(\mathbb{R})$  delle funzioni integrabili (secondo Lebesgue) in classi di equivalenza. Ad ogni classe corrisponderanno tutte le funzioni equivalenti ad una funzione data, rappresentante la classe. Possiamo quindi dare la seguente definizione.

**Definizione 6.9.** Definiamo  $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}) = \{[f] : f \in L^1(\mathbb{R})\}$ , dove  $[f]$  indica le classi di equivalenza rispetto alla relazione definita dalla 6.8.

### 6.3 FUNZIONI LOCALMENTE INTEGRABILI

Abbiamo già definito l'integrale secondo Lebesgue di una funzione su tutto l'intervallo reale. La generalizzazione ad un intervallo qualsiasi è facilmente realizzabile grazie alla funzione caratteristica introdotta nella definizione 6.1.

**Definizione 6.10.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione e  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  un intervallo reale. Definiamo integrale di  $f$  su  $[a, b]$  come:

$$\int_a^b f = \int f \cdot \chi_{[a, b]}$$

In altre parole l'integrale  $\int_a^b f$  equivale all'integrale della funzione che vale  $f$  su  $[a, b]$  e zero altrove.

**Teorema 6.7.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$  allora  $f$  è integrabile su qualsiasi intervallo limitato  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ .

*Dimostrazione.* Prendiamo  $f \simeq f_1 + f_2 + \dots$ , e definiamo per  $n = 1, 2, \dots$

$$g_n(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{se } x \in [a, b] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

allora è immediato verificare che  $f \cdot \chi_{[a,b]} \simeq g_1 + g_2 + \dots$   $\square$

L'inverso del teorema in generale non è vero, per esempio per quanto riguarda la funzione costante  $f = 1$ , l'integrale  $\int_a^b f$  esiste per ogni  $-\infty < a < b < +\infty$  ma  $f \notin L^1(\mathbb{R})$ .

**Definizione 6.11** (Funzioni localmente integrabili). Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione. Diremo che  $f$  è localmente integrabile se  $\int_a^b f$  esiste per qualsiasi  $-\infty < a < b < +\infty$ .

Lo spazio delle funzioni localmente integrabili su  $[a, b]$  viene indicato con  $L^1([a, b])$

*Osservazione 6.3.*  $L^1(\mathbb{R})$  è un sottospazio dello spazio delle funzione localmente integrabili.

**Teorema 6.8.** Siano  $f, g$  funzioni localmente integrabili, allora il loro prodotto  $f \cdot g$  è localmente integrabile.

## 6.4 UGUAGLIANZA QUASI OVUNQUE

**Definizione 6.12.** Una funzione  $\|\cdot\| : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  con le seguenti proprietà:

- (i)  $\|f\| \geq 0$  e  $\|f\| = 0$  se e solo se  $f \simeq 0$ .
- (ii)  $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$
- (iii)  $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$

si dice *norma* su  $L^1$ .

**Definizione 6.13.** Chiamiamo *norma standard* su  $L^1$  la funzione  $\|f\| = \int |f|$ .

La dimostrazione che questa funzione è effettivamente una norma è molto semplice ed è lasciata per esercizio.

**Definizione 6.14.** Dato un sottoinsieme  $M \subset \mathbb{R}$ , diremo che  $M$  è un insieme di *misura nulla* se la sua funzione caratteristica è una funzione nulla, vale a dire

$$\int |\chi_M| = \int \chi_M = 0$$

A partire da questa definizione otteniamo una immediata conseguenza riguardante gli insiemi di misura nulla.

**Teorema 6.9.** *Un qualsiasi sottoinsieme di un insieme di misura nulla è a misura nulla.*

*Dimostrazione.* Se così non fosse si potrebbe scrivere l'integrale di  $\chi_M$  come somma di integrali non tutti nulli, assurdo.  $\square$

*Osservazione 6.4.* Un punto è un insieme a misura nulla, una qualsiasi unione finita di punti è a misura nulla. Inoltre, anche un insieme formato un'infinità numerabile di punti è a misura nulla. Ciononostante esistono insiemi a misura nulla formati da un'infinità non numerabile di punti.

**Definizione 6.15** (Uguaglianza quasi ovunque). Siano  $f, g$  funzioni reali. Se l'insieme  $Z = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$  è un insieme a misura nulla, allora diremo che  $f = g$  *quasi ovunque* e scriveremo

$$f = g \quad \text{q.o.}$$

**Teorema 6.10.**  $f = g$  q.o. se e solo se  $\int |f - g| = 0$

*Dimostrazione.*  $(\Rightarrow)$  Se  $f = g$  q.o. allora l'insieme  $Z$  dei punti in cui  $f(x) \neq g(x)$  è a misura nulla, cioè  $\int \chi_Z = 0$ . Mostriamo che  $|f - g| \simeq \chi_Z + \chi_Z + \dots$ , infatti:

(i)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int \chi_Z < +\infty$$

(ii)

$$|f - g| = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_Z \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus Z$$

Inoltre  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus Z$  abbiamo che  $|f - g|(x) = 0$  per ipotesi, quindi:

$$\int |f - g| = \sum_{n=0}^{+\infty} \int \chi_Z = 0$$

$(\Leftarrow)$  Sia  $Z$  ancora l'insieme delle  $x$  per cui  $f(x) \neq g(x)$ , allora è immediato verificare che:

$$\chi_Z \simeq |f - g| + |f - g| + \dots$$

Quindi:

$$\int \chi_Z = \int \sum_{n=0}^{+\infty} |f - g| = 0$$

dunque  $Z$  è un insieme a misura nulla.  $\square$

**Corollario 6.10.1.** *Una funzione è una funzione nulla se e solo se è uguale alla funzione identicamente nulla quasi ovunque.*

*Osservazione 6.5.* Se  $f = g$  q.o. allora:

$$\left| \int f - \int g \right| = \left| \int f - g \right| \leq \int |f - g| = 0$$

quindi abbiamo che  $\int f = \int g$ .

Dunque partendo dal valore dell'integrale non si può risalire alla funzione ma al più alla sua classe di equivalenza.

*Esempio 6.1.* La funzione di Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{I} \end{cases}$$

è uguale a zero quasi ovunque, quindi:

$$\int f = 0$$

Si ricorda che la funzione di Dirichlet non ammetteva integrale secondo Riemman.

**Teorema 6.11.** Sia  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  e sia:

$$Z := \left\{ x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| = +\infty \right\}$$

allora  $Z$  è un insieme a misura nulla.

*Dimostrazione.*  $f$  è ben definita in  $\mathbb{R} \setminus Z$ ; in questo insieme di punti:

$$f + \chi_Z \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$$

quindi:

$$\int f + \chi_Z = \int \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \int f$$

da cui

$$\int \chi_Z = 0 \quad \square$$

## 6.5 CONVERGENZA DI SUCCESSIONI

Come abbiamo visto per la teoria dell'integrale di Lebesgue si è rivelato più utile utilizzare il criterio di uguaglianza quasi ovunque piuttosto che quello di uguaglianza di funzioni, analogamente avremo l'utilizzo dello stesso concetto per la definizione di convergenza di successioni.

**Definizione 6.16.** Diremo che una successione  $\{f_n\}$  converge a  $f$  quasi ovunque, e scriveremo

$$f_n \rightarrow f \text{ q.o. per } n \rightarrow +\infty$$

se  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  per  $n \rightarrow +\infty \forall x \in \mathbb{R} \setminus Z$  ove  $Z$  è un insieme a misura nulla.

La convergenza quasi ovunque gode delle seguenti proprietà:

(i) Se  $f_n \rightarrow f$  q.o. allora

$$\lambda f_n \rightarrow \lambda f \text{ q.o. } \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

(ii) Se  $f_n \rightarrow f$  q.o. e  $g_n \rightarrow g$  q.o. allora

$$f_n + g_n \rightarrow f + g \text{ q.o.}$$

(iii) Se  $f_n \rightarrow f$  q.o. allora

$$|f_n| \rightarrow |f| \text{ q.o.}$$

**Teorema 6.12** (Unicità del limite di funzioni). *Sia  $\{f_n\}$  una successione tale che  $f_n \rightarrow f$  q.o. , allora  $f_n \rightarrow g$  q.o. se e solo se  $g = f$  q.o.*

*Dimostrazione.* ( $\Leftarrow$ ) Siano

$$A := \{x \in \mathbb{R} : f_n(x) \not\rightarrow f(x)\}$$

$$B := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq g(x)\}$$

Per ipotesi  $A$  e  $B$  sono insiemi a misura nulla quindi anche  $A \cup B$  è un insieme a misura nulla, e dunque

$$f_n \rightarrow g \text{ q.o.}$$

( $\Rightarrow$ ) Siccome

$$f_n \rightarrow f \text{ q.o. e } f_n \rightarrow g \text{ q.o.}$$

$$0 = f_n - f_n \rightarrow f - g \text{ q.o.}$$

Cioè  $f = g$  q.o.

□

Oltre alla convergenza quasi ovunque esiste un altro criterio per la convergenza di funzioni:

**Definizione 6.17** (Convergenza in norma). Sia  $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R})$ , diremo che  $\{f_n\}$  converge a  $f$  in norma, e scriveremo

$$f_n \rightarrow f \text{ i.n. per } n \rightarrow +\infty$$

se  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ t.c. } \forall n > N \text{ abbiamo } \|f_n - f\| < \varepsilon$ , secondo la definizione di norma 6.13.

Si può verificare che anche per la convergenza in norma valgono le stesse proprietà elementari viste per la convergenza quasi ovunque.

**Proposizione 6.2.** *Se  $f_n \rightarrow f$  i.n. , allora  $\int f_n \rightarrow \int f$*

*Dimostrazione.*

$$\left| \int f_n - \int f \right| \leq \int |f_n - f| = \|f_n - f\|$$

che tende a zero per ipotesi.  $\square$

Viene naturale chiedersi se fra i due criteri di convergenza proposti esiste una qualche relazione. Senza altre ipotesi, la risposta a tale domanda è negativa, come mostrano i due esempi seguenti.

*Esempio 6.2.* Sia

$$f_n = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} & x \in [-n, n] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Siccome  $f_n(x) \rightarrow 0 \forall x \in \mathbb{R}$  possiamo dire che  $f_n \rightarrow f \equiv 0$  q.o. , quindi la successione converge quasi ovunque, tuttavia

$$\|f_n - f\| = \int |f_n - f| = \int_{-n}^n \frac{1}{\sqrt{n}} dx = 2\sqrt{n}$$

che è chiaramente divergente. Quindi la successione non converge in norma.

*Esempio 6.3.* Sia

$$f_n = \begin{cases} 1 & \text{se } 2^{k-1} \leq n < 2^k, x \in [\frac{n}{2^{k-1}} - 1, \frac{n+1}{2^{k-1}} - 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Abbiamo dunque

$$f_1 = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_2 = \begin{cases} 1 & x \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$f_3 = \begin{cases} 1 & x \in [1/2, 1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

...

Allora

$$\int |f_n| = \int_{\frac{n}{2^{k-1}}-1}^{\frac{n+1}{2^{k-1}}-1} 1 dx = \frac{1}{2^{k-1}} \rightarrow 0 \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

poiché  $k \rightarrow +\infty$  per  $n \rightarrow +\infty$ . Quindi  $\{f_n\}$  convergerà in norma alla successione identicamente nulla, tuttavia non potrà mai convergere quasi ovunque, poiché per ogni valore di  $n$   $f_n$  è non nulla su un intervallo, che è un insieme a misura non nulla.

Dunque i due criteri di convergenza sono in generale distinti e indipendenti, possiamo renderli equivalenti con delle ipotesi aggiuntive.

**Lemma 5.** Sia  $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R})$ . Se  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n| < +\infty$ , allora esiste una funzione integrabile  $f$  tale che  $f \simeq f_1 + f_2 + \dots$ .

**Teorema 6.13.** Sia  $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R})$  una successione, e  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| < +\infty$  allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f$  converge quasi ovunque.

*Dimostrazione.* Per il lemma precedente esiste una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tale che  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ . Ciò significa che  $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$  per ogni  $x$  tale che  $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$ .

Dobbiamo ora mostrare che l'insieme dei punti in cui la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$  non converge assolutamente è un insieme di misura nulla. Sia  $\chi$  la funzione caratteristica di tale insieme, allora  $g \simeq f_1 - \chi f_1 + f_2 - \chi f_2 + \dots$ , e quindi

$$\int |g| = \int g = \int f_1 - \int \chi f_1 + \int f_2 - \int \chi f_2 + \dots = 0 \quad \square$$

**Corollario 6.13.1.** Se  $f \simeq \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ , allora  $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$  q.o.

**Teorema 6.14.** Sia  $\{f_n\} \subset L^1(\mathbb{R})$  tali che  $\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| < +\infty$ . Allora  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f$  q.o. se e solo se  $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n = f$  i.n.

## 6.6 PRIMITIVA DI UNA FUNZIONE

per completare la trattazione dell'integrale di Lebesgue per funzioni a valori reali trattiamo sommariamente il concetto di primitiva di una funzione.

**Teorema 6.15.** Sia  $f \in L^1((a, b))$  con  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ , allora  $\forall c \in [a, b]$  la funzione

$$F(x) := \int_c^x f$$

è continua in  $(a, b)$  e ammette limite finito agli estremi dell'intervallo.

**Teorema 6.16.** Sia  $f$  e  $F$  come sopra, se  $f$  è continua nel punto  $x_0 \in (a, b)$  allora  $F$  è derivabile in  $x_0$  e

$$F'(x_0) = f(x_0)$$

**Definizione 6.18.** Sia  $f \in L^1((a, b))$  con  $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ . Se  $f$  è continua in un intervallo  $I \subseteq (a, b)$ , allora chiamiamo primitiva di  $f$  la funzione

$$F(x) := \int_c^x f(x)$$

per ogni valore  $x \in I$  e  $\forall c \in [a, b]$ .



## 6.7 GENERALIZZAZIONE DELL'INTEGRALE DI LEBESGUE

Ogni teorema visto in questo capitolo può essere generalizzato facilmente a funzioni  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  cambiando la definizione di integrale a gradino, che sarà una funzione  $f$  del tipo

$$f = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n \chi_{[a_n, b_n)}$$

con  $\lambda_n \in \mathbb{C}$  e  $[a_n, b_n) \subset \mathbb{R}$ . Ricordandoci che è possibile scrivere  $f(x) = u(x) + i v(x)$ , enunciamo il seguente teorema, di cui non viene fornita la dimostrazione.

**Teorema 6.17.** *La funzione  $f$  come sopra è integrabile se e solo se  $u$  e  $v$  sono integrabili e*

$$\int f = \int u + i \int v$$

Proviamo ora ad estendere il concetto di integrale di Lebesgue per funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . In questo caso è necessario ridefinire il concetto di intervallo semiaperto  $I \subset \mathbb{R}^n$  su cui opera una funzione a gradini, che assumerà la forma:

$$I = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2) \times \dots \times [a_n, b_n)$$

Avremo che  $x \in I$  se e solo se  $x_i \in [a_i, b_i) \forall i = 1, \dots, n$  e

$$m(I) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

Infine diremo che  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  se

$$\int f = \int dx_1 \int dx_2 \dots \int f(x) dx_n$$

ove ogni singolo integrale indica l'integrale di Lebesgue su  $\mathbb{R}$  come già visto.

**Definizione 6.19.** Indichiamo con  $L^p(\mathbb{R}^n)$  le funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  tali che

$$\int |f|^p < +\infty$$

Se è vale la definizione diremo che la funzione è  $p$ -integrabile.



# 7

## SPAZI TOPOLOGICI, METRICI E DI BANACH

### 7.1 SPAZIO TOPOLOGICO

**Definizione 7.1** (Topologia). Sia  $X$  un insieme, una topologia è una famiglia di sottoinsiemi  $\tau$  tale che:

- (i)  $\{X, \emptyset\} \in \tau$ .
- (ii) Se  $X \supset \{A_1, \dots, A_n\} \in \tau$  allora  $\bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau$ .
- (iii) Se  $X \supset \{A_j\} \in \tau$ , allora  $\bigcup_{j=1}^{+\infty} A_j \in \tau$ .

*Esempio 7.1.* Consideriamo il caso in cui  $X = \mathbb{R}$  e  $\tau$  sia l'insieme degli intervalli aperti su  $\mathbb{R}$ , allora

- (i)  $\mathbb{R} \in \tau$  e, per definizione dell'insieme vuoto,  $\emptyset \in \tau$ .
- (ii) Se  $(a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n) \in \tau$ , allora  $\bigcap_{i=1}^n (a_i, b_i) \in \tau$ .
- (iii) Se  $\{(a_i, b_i)\} \in \tau$  allora  $\bigcup_{i=1}^{+\infty} (a_i, b_i) \in \tau$ .

Quindi  $\tau$  è una topologia, ed è detta *topologia standard* su  $\mathbb{R}$ .

Notiamo che in generale  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} (a_i, b_i)$  non è un elemento della topologia  $\tau$  definita come sopra, infatti se prendiamo  $b_i = 1 + \frac{1}{i}$  e  $a_i = \frac{1}{i}$ , allora

$$\bigcap_{i=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{i}, 1 + \frac{1}{i}\right) = [0, 1]$$

**Definizione 7.2** (Spazio topologico). Se su  $X$  è possibile definire una topologia  $\tau$  diremo che la coppia  $(X, \tau)$  è uno spazio topologico.

**Definizione 7.3.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico, vengono detti aperti di  $X$  l'insieme della parti di  $\tau$ .

Per come è stata definita, possiamo notare che su un insieme sarà possibile in generale definire più di una topologia.

*Esempio 7.2.* Prendiamo  $X = \mathbb{R}$ , come visto nell'esempio precedente è possibile definire su  $\mathbb{R}$  la topologia standard formata da tutti gli intervalli aperti; è però immediato verificare che anche

$$\tau_1 := \{I \subseteq \mathbb{R} : I = (-a, b) \text{ con } a, b \in \mathbb{R}^+\}$$

è una topologia su  $\mathbb{R}$ , che non presenta elementi disgiunti.

Infine anche  $\tau_2 := \{\mathbb{R}, \emptyset\}$  è una topologia su  $\mathbb{R}$ , detta *topologia grossa*.

**Definizione 7.4** (Insieme chiuso). Sia  $(X, \tau)$  una topologia, un sottoinsieme  $A \subseteq X$  è chiuso se  $A^c \in \tau$ .

Nonostante questa definizione, un sottoinsieme non è univocamente definito come aperto o come chiuso, infatti gli insiemi  $X$  e  $\emptyset$  sono aperti per la definizione 7.1, però  $X^c = \emptyset$ , e dunque  $\emptyset$  è chiuso, e  $\emptyset^c = X$ , quindi  $X$  è un chiuso.

**Proposizione 7.1.** Siano  $A_i$  degli insiemi chiusi nello spazio topologico  $(X, \tau)$ , allora  $\bigcap_{i=1}^{+\infty} A_i$  e  $\bigcup_{i=1}^n A_i$  sono ancora degli insiemi chiusi.

Grazie alla definizione di topologia e di insieme aperto è possibile separare gli elementi di  $X$ , da qui sarà possibile introdurre il concetto di punto di accumulazione, limite e continuità.

**Definizione 7.5** (Intorno di un punto). Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $x \in X$  diciamo che  $\mathcal{U}(x)$  è un intorno di  $x$  se contiene almeno un elemento di  $\tau$  contenente  $x$ .

Indicheremo con  $\mathcal{I}(x)$  l'insieme di tutti gli intorni del punto  $x$ . Se l'intorno  $\mathcal{U}(x)$  è esso stesso un elemento di  $\tau$ , allora viene detto *intorno aperto*.

**Definizione 7.6** (Punto interno). Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $A \subset X$ ; diciamo che un punto  $x \in A$  è interno ad  $A$  se  $\exists \mathcal{U}(x)$  tale che  $\mathcal{U}(x) \subseteq A$ .

D'ora in avanti indicheremo l'insieme di tutti i punti interni di un sottoinsieme  $A$  con  $A^\circ$ .

**Teorema 7.1.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico, allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i)  $A \in \tau$
- (ii) Se  $x \in A \Rightarrow A \in \mathcal{I}(x)$ .
- (iii)  $A = A^\circ$
- (iv)  $\forall x \in A \exists \mathcal{U}(x) \text{ t.c. } \mathcal{U}(x) \subset A$

**Definizione 7.7** (Punto di accumulazione). Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico e sia  $A \subseteq X$ , diremo che  $x_0 \in X$  è un punto di accumulazione di  $A$  se  $\forall \mathcal{U}(x_0) \exists x \neq x_0 \in A \cap \mathcal{U}(x_0)$ .

L'insieme dei punti di accumulazione di  $A$  verrà indicato con  $A'$ . Si può dimostrare che se  $A, B \subset X$ , allora:

- (i) Se  $A \subset B$  allora  $A' \subset B'$ .
- (ii)  $(A \cap B)' \subseteq A' \cap B'$ .
- (iii)  $(A \cup B)' = A' \cup B'$

**Teorema 7.2.** Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico,  $A \subset X$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i)  $A$  è chiuso;

(ii)  $A' \subseteq A$ ;

*Dimostrazione.* • (i)  $\Rightarrow$  (ii) Supponiamo che  $A$  sia chiuso e prendiamo un punto  $x \in A^c$ .  $A^c$  è un aperto, quindi esiste un intorno  $\mathcal{U}(x)$  che non contiene punti di  $A$ . Per questo motivo necessariamente  $x$  non può essere di accumulazione per  $A$  e quindi  $A' \subseteq A$ .

• (ii)  $\Rightarrow$  (i) Sia ora  $A' \subseteq A$  e sia  $x$  un punto di  $A^c$ . Per ipotesi  $x$  non è di accumulazione per  $A$ , cioè esiste un intorno  $\mathcal{U}(x)$  che non contiene punto di  $A$ , diverso da  $x$ . Dato che  $x$  è contenuto in  $A^c$  allora  $\mathcal{U}(x) \subset A^c$ , e cioè  $A^c$  è aperto. Da questa osservazione discende la tesi.  $\square$

**Corollario 7.2.1.** Se  $A$  è un sottoinsieme di uno spazio topologico tale che  $A' = \emptyset$ , allora  $A$  è chiuso.

Da questo corollario otteniamo immediatamente un'osservazione riguardante gli insiemi con un numero finito di punti. Infatti dalla definizione di punti di accumulazione sappiamo che se  $A$  è un insieme con un numero finito di punti, necessariamente dovrà essere  $A' = \emptyset$ , e quindi  $A$  è chiuso.

**Definizione 7.8** (Chiusura di un insieme). Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico, e  $A \subset X$ . Chiamiamo chiusura di  $A$  l'insieme  $\bar{A} = A^\circ \cup A'$ .

Ovviamente, dal teorema dimostrato precedentemente otteniamo che  $\bar{A}$  è un insieme chiuso.

**Definizione 7.9** (Insieme denso). Un sottoinsieme  $A$  di uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è detto *denso* in  $X$  se  $\bar{A} = X$ .

**Definizione 7.10** (Spazio topologico di Hausdorff). Uno spazio topologico  $(X, \tau)$  è detto *separabile* (o di Hausdorff) se  $\forall x, y \in X, x \neq y, \exists \mathcal{U}(x), \mathcal{V}(y)$  intorni tali che  $\mathcal{U}(x) \cap \mathcal{V}(y) = \emptyset$ .

*Osservazione 7.1.* Notiamo che le proprietà dello spazio topologico dipende dalla topologia scelta, infatti se prendiamo in considerazioni le topologie su  $\mathbb{R}$  dell'esempio 7.2 abbiamo che la topologia standard  $\tau$  è di Hausdorff, mentre le topologie  $\tau_1$  e  $\tau_2$  sono non separabili.

**Definizione 7.11** (Convergenza di successioni). Sia  $(X, \tau)$  uno spazio topologico sia  $\{x_n\} \subset X$  una successione, allora diremo che la successione converge a  $x \in X$  se  $\forall \mathcal{U}(x) \exists N$  t.c.  $\forall n > N x_n \in \mathcal{U}(x)$

**Definizione 7.12** (Continuità di funzioni). Siano  $(X, \tau_X)$  e  $(Y, \tau_Y)$  due spazi topologici. Sia  $f : X \rightarrow Y$  una funzione. Diremo che  $f$  è *continua* se  $\forall \vartheta \in \tau_Y$  la sua controimmagine

$$f^{-1}(\vartheta) \in \tau_X$$

**Definizione 7.13** (Base di intorni). Sia  $x \in X$  un punto di uno spazio topologico  $(X, \tau)$ . Diremo che un qualsiasi insieme di intorni  $\mathcal{B}(x) \subset \mathcal{J}(x)$  è una *base di intorni* di  $x$  se  $\forall \mathcal{V}(x) \in \mathcal{J}(x) \exists \mathcal{U}(x) \in \mathcal{B}(x)$  tale che  $\mathcal{U}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ .

Se la base di intorni è numerabile  $\forall x \in X$  diremo che  $X$  è *primo numerabile*.

Dalla definizione di base di intorni possiamo giungere ad un ulteriore criterio per stabilire se un generico insieme  $A$  è chiuso.

**Teorema 7.3.** Dato  $A \subset X$  sottoinsieme di uno spazio topologico  $(X, \tau)$ , allora se  $A$  è chiuso allora contiene tutti i punti limite delle sue successioni convergenti.

Inoltre se  $X$  è primo numerabile, allora dato  $A \subset X$ , se ogni successione convergente in  $A$  ha limite in  $A$ , allora  $A$  è chiuso.

## 7.2 SPAZI METRICI

**Definizione 7.14.** Una funzione  $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$  definita su un insieme  $X \neq \emptyset$  è detta *metrica* su  $X$  se gode delle seguenti proprietà:

- (i)  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = 0$  se e solo se  $x = y$ ;
- (ii)  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) = d(y, x)$ ;
- (iii)  $\forall x, y, z \in X \quad d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

La coppia  $(X, d)$  è detta *spazio metrico*.

**Definizione 7.15.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico, e siano  $x \in X, r > 0$ . Si definisce *intorno* (o sfera) di  $x$  di raggio  $r$  l'insieme

$$I(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

*Osservazione 7.2.* In uno spazio metrico  $(X, d)$ , l'insieme delle sfere aperte genera una topologia su  $X$ . Quindi, assegnato un generico spazio metrico, potremo trovarne una topologia; quindi uno spazio metrico è anche topologico.

**Definizione 7.16.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e  $\{x_n\}$  una successione a valori in  $X$ . Diremo che la successione  $\{x_n\}$  è *convergente* ad  $x_0 \in X$  se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \geq N \quad d(x_n, x_0) < \varepsilon$$

**Osservazione 7.3.** Si può notare che in uno spazio metrico ogni successione convergente è di Cauchy.

Il seguente teorema mette in evidenza come uno spazio metrico sia sempre uno spazio topologico di Hausdorff, cioè separabile.

**Teorema 7.4.** Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e siano  $x, y \in X$ . Allora esiste  $r > 0$  tale che

$$I(x, r) \cap I(y, r) = \emptyset$$

**Dimostrazione.** Poniamo  $r = \frac{1}{3}d(x, y)$ . Sia  $z \in I(x, r)$  e valutiamone la distanza da  $y$ . Abbiamo

$$3r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) = r + d(y, z)$$

cioè  $d(y, z) \geq 2r$  e quindi  $z \notin I(y, r)$ . □

### 7.3 SPAZI DI BANACH

**Definizione 7.17.** Uno spazio vettoriale dotato di una norma è detto *spazio normato*

**Osservazione 7.4.** Ogni spazio normato è anche uno spazio metrico, ove la distanza fra punti è definita come

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

**Definizione 7.18** (Spazio di Banach). Uno spazio normato si dice *completo* se ogni successione di Cauchy è anche convergente. Uno spazio normato completo si dice *di Banach*.

**Definizione 7.19** (Successione assolutamente convergente). Una successione  $\{x_n\}$  è detta assolutamente convergente se la successione  $\{\|x_n\|\}$  converge in  $\mathbb{R}$ .

Esiste un comodo criterio per determinare se uno spazio normato è di Banach.

**Teorema 7.5.** Uno spazio normato  $(X, \|\cdot\|)$  è di Banach se e solo se ogni successione convergente è assolutamente convergente.

**Definizione 7.20.** Definiamo spazio  $l^p$ , per  $p \geq 1$ , lo spazio di tutte le successioni  $\{z_n\}$  di numeri complessi tali che  $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^p \leq \infty$ .

#### 7.3.1 Esempi di spazi di Banach

Daremo in questa sezione alcuni esempi di spazi di Banach, ma inizieremo introducendo due disuguaglianze necessarie alla dimostrazione delle proprietà degli spazi normati che introdurremo.

**Lemma 6** (Disuguaglianza di Hölder). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico,  $p \geq 1$  e  $q \geq 1$  coniugati, cioè tali che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Se  $f \in L^p(X)$  e  $g \in L^q(X)$ , allora  $(f \cdot g) \in L^1(X)$  e*

$$\int_X |f \cdot g| dx \leq \left[ \int_X |f|^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[ \int_X |g|^q dx \right]^{\frac{1}{q}}$$

**Lemma 7** (Disuguaglianza di Minkowski). *Sia  $(X, d)$  uno spazio metrico e sia  $p \geq 1$  e siano  $f, g \in L^p(X)$ , allora*

$$\left( \int_X |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int_X |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int_X |g|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Siccome le disuguaglianze 7 e 6 valgono per ogni spazio metrico, anche per gli insiemi infinito numerabili, gli integrali nelle formule possono diventare delle sommatorie; in questo caso la disuguaglianza di Hölder sarà scritta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n \beta_n| \leq \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |\beta_n|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

ove  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  sono successioni in  $X$  a valori in  $\mathbb{R}$  e  $p$  e  $q$  coniugati.

Anche la disuguaglianza di Minkowski può essere scritta in termini di sommatorie nel modo seguente:

$$\left( \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n + \beta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |\alpha_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=0}^{+\infty} |\beta_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

*Spazi  $\mathbb{C}^n$  e  $\mathbb{R}^n$*

Consideriamo ora la norma su  $\mathbb{C}^n$  ( o in maniera equivalente su  $\mathbb{R}^n$ ) definita come segue: se  $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$  poniamo

$$\|z\|_p := (|z_1|^p + \dots + |z_n|^p)^{\frac{1}{p}} \quad \text{con } p \geq 1$$

Grazie alle disuguaglianza di Minkowski 7 è immediato verificare che

$$\begin{aligned} \|z + w\|_p &= \left( \sum_{i=1}^n |z_i + w_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n |z_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n |w_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|z\|_p + \|w\|_p \end{aligned}$$

Le altre due proprietà della norma sono banali. Si può inoltre dimostrare che  $\mathbb{C}^n$ , e anche  $\mathbb{R}^n$ , in quanto completi, sono spazi di Banach con questa norma. Lo stesso vale per la norma infinito sempre su  $\mathbb{C}^n$  e definita come segue:

$$\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| < +\infty \quad x \in \mathbb{C}^n$$



*Spazi  $l^p$* 

Passiamo ora agli spazi  $l^p$  definiti dalla 7.20. Si può dimostrare che  $l^p$  è uno spazio vettoriale rispetto alla somma di successioni  $\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}$  e al prodotto per uno scalare  $k$ , cioè  $k\{x_n\} = \{kx_n\}$ . La dimostrazione che la somma è un'operazione interna è semplice applicazione della disuguaglianza di Minkowski 7, infatti

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{n=0}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

quindi se  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  sono in  $l^p$  allora anche  $\{x_n + y_n\}$  lo è. Equivalentemente, la dimostrazione che il prodotto sia un'operazione interna si basa sulla disuguaglianza di Hölder 6. Sugli spazi di questo tipo è inoltre possibile definire un norma del tipo

$$\|\{x_n\}\|_{l^p} = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

in questo modo gli spazi  $l^p$  diventano spazi normati; si può dimostrare che questi spazi sono anche di Banach.

Possiamo inoltre definire gli spazi  $l^\infty$  su  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , come

$$l^\infty = \left\{ \{x_n\} : \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \leq +\infty \right\}$$

Anche questo tipo di spazi sono vettoriali e possono essere normati utilizzando la seguente funzione

$$\|x_n\|_\infty = \sup_n |x_n|$$

si può dimostrare che anche lo spazio  $l^\infty$  è di Banach. Possiamo infine far notare che gli spazi  $l^p$  risultano separabili, mentre quelli  $l^\infty$  no.

*Spazi  $L^p$* 

Consideriamo lo spazio vettoriale  $L^p(\mathbb{C})$ , sottospazio dello spazio vettoriale delle funzioni complesse definito dalla definizione 6.19. Su questo spazio possiamo definire una norma come

$$\|f\|_{L^p} = \left( \int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

dalla disuguaglianza di Minkowski abbiamo che

$$\|f + g\|_{L^p} = \left( \int |f + g|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \int |f|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \int |g|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Tuttavia  $\|f\|_{L^p} = 0$  non implica  $f \equiv 0$ , ma  $f = 0$  q.o., quindi la norma sopra definita è una seminorma su  $L^p(\mathbb{C})$ , mentre diventa una norma su  $\mathcal{L}^p(\mathbb{C})$ . Per questo motivo, estendendo la precedente definizione di norma allo spazio  $\mathcal{L}^p$ , definito per  $1 \leq p < +\infty$ , come lo spazio delle classi di equivalenza delle funzioni  $p$ -integrabili, otteniamo che quest'ultimo è uno spazio di Banach.

### Spazio $\mathcal{L}^\infty$

Come ultimo esempio degli spazi di Banach consideriamo lo spazio  $\mathcal{L}^\infty$  delle funzioni essenzialmente limitate, cioè

$$\mathcal{L}^\infty = \{f : X \rightarrow \mathbb{R} : |f(x)| \leq M \text{ q.o.}\}$$

cioè  $\mathcal{L}^\infty$  è lo spazio delle funzioni limitate per ogni  $x \in X \setminus A$  dove  $A$  è un insieme a misura nulla. Anche questo spazio può essere normato tramite la funzione

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty} = \inf \mathcal{M} \quad \mathcal{M} = \{M \in \mathbb{R}^+ : |f(x)| \leq M\}$$

Si può infine dimostrare che anche questo è uno spazio completo e, quindi, di Banach.

## 7.4 SPAZI VETTORIALI COMPLESSI

**Definizione 7.21.** Uno spazio vettoriale  $V$  si dice *finito dimensionale* se esistono un numero finito di elementi  $\{v_1, \dots, v_n\} \subset V$  tali che  $V = \text{span}\{v_1, \dots, v_n\}$ . In caso contrario  $V$  si dirà *infinito dimensionale*.

**Definizione 7.22** (Prodotto scalare in  $\mathbb{C}^n$ ). Siano  $x, y \in \mathbb{C}^n$ , definiamo il prodotto scalare interno in  $\mathbb{C}^n$  come:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \cdot y_i$$

**Proposizione 7.2.** Siano  $x_1, x_2, y \in \mathbb{C}^n$  e sia  $\alpha \in \mathbb{C}$ , allora:

- (i)  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$
- (ii)  $(\alpha x, y) = (x, \bar{\alpha}y) = \bar{\alpha}(x, y)$
- (iii)  $(\bar{x}, y) = (y, x)$
- (iv)  $(x, x) \in \mathbb{R}_0^+$  e  $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (v) (Disuguaglianza di Schwarz)  $|(x, y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2$
- (vi) (Norma euclidea)  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$
- (vii)  $\cos(\widehat{xy}) = \frac{(x, y)}{\|x\| \|y\|}$

**Definizione 7.23** (Ortogonalità). Due vettori  $x, y \in \mathbb{C}^n$  si dicono *ortogonali*, e si indicano  $x \perp y$ , se  $(x, y) = 0$ .

**Definizione 7.24** (Complemento ortogonale). Sia  $x \in V$  un elemento di uno spazio vettoriale. Si definisce *complemento ortogonale* di  $x$  il sottoinsieme  $x^\perp$  di  $V$  definito come

$$x^\perp = \{y \in V : (x, y) = 0\}$$

Come nel caso reale, si può dimostrare che il complemento ortogonale forma un sottospazio vettoriale.

La definizione di ortogonalità permette di definire il fondamentale concetto di base ortogonale, cioè una base di uno spazio vettoriale formato da vettori mutuamente ortogonali.

**Teorema 7.6.** *Dato uno spazio vettoriale  $V$  con  $\dim(V) = n$ , un insieme di  $n$  vettori ortogonali non nulli  $\{e_1, \dots, e_n\}$  forma una base di  $V$ .*

*Dimostrazione.* Dobbiamo dimostrare che gli  $n$  vettori scelti sono linearmente indipendenti, cioè che se esistono  $a_1, \dots, a_n$  tali che

$$\sum_{i=1}^n a_i e_i = 0$$

allora gli  $a_i$  sono tutti nulli.

Infatti, calcolando il prodotto scalare dell'espressione precedente otteniamo

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i e_i, e_j \right) = \sum_{i=1}^n a_i (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n a_i \|e_j\|^2 \delta_{ij}$$

cioè

$$a_j \|e_j\|^2 = 0$$

e, essendo gli  $e_i$  non nulli per ipotesi, questa espressione è verificata se  $a_j = 0 \forall j = 1, \dots, n$ .  $\square$

**Definizione 7.25.** Se  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è una base di  $V$  e  $e_j \in e_i^\perp \forall i, j = 1, \dots, n$   $i \neq j$ , allora diremo che questa base è una base ortogonale.

**Definizione 7.26** (Base ortonormale). Una base  $\{e_1, \dots, e_n\}$  si dice ortonormale se  $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$

Assegnata una qualsiasi base di uno spazio vettoriale, qualsiasi vettore dello spazio può essere espresso in termini di questa. Il vettore scritto in termini degli elementi della base si dice decomposto sulla base.

**Definizione 7.27.** Sia  $\{e_1, \dots, e_n\}$  una base di uno spazio vettoriale  $V$  e  $x \in V$ . Si chiamano componenti, o coordinate, di  $x$  sulla base i coefficienti

$$x_i = (x, e_i)$$

Il vettore  $x$  può quindi essere espresso come  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

**Teorema 7.7.** *La decomposizione di un vettore  $x \in V$  su una base scelta  $\{e_1, \dots, e_n\}$  è univoca.*

*Dimostrazione.*

$$x_j = (x, e_j) = \left( \sum_{i=1}^n x_i e_i, e_j \right) = \sum_{i=1}^n x_i (e_i, e_j) = \sum_{i=1}^n x_i \delta_{ij} \quad \square$$

Trattiamo il prodotto scalare in termini delle sue componenti rispetto ad una base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ . Siano  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$ , allora

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \left( \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_i, \mathbf{x}) \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n (\mathbf{e}_j, \mathbf{y}) \mathbf{e}_j \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})} (\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \overline{(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})} (\mathbf{e}_j, \mathbf{y}) \delta_{ij} = \\ &= \sum_{i=1}^n \overline{(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})} (\mathbf{e}_i, \mathbf{y}) \end{aligned}$$

Possiamo quindi scrivere anche la norma in termini del prodotto scalare rispetto alle componenti

$$\|\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \|(\mathbf{e}_i, \mathbf{x})\|^2$$

## 8.1 FORME SESQUILINEARI

Sia  $X$  uno spazio lineare in generale infinito dimensionale su  $\mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , cerchiamo di ampliare la definizione di prodotto scalare a questi spazi.

**Definizione 8.1** (Forma sesquilineare). Chiamiamo forma sesquilineare un operatore  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

- (i)  $B(x + x', y) = B(x, y) + B(x', y)$
- (ii)  $B(x, y + y') = B(x, y) + B(x, y')$
- (iii)  $B(\alpha x, y) = \bar{\alpha} B(x, y)$
- (iv)  $B(x, \alpha y) = \alpha B(x, y)$

$\forall x, x', y, y' \in X$  e  $\alpha \in \mathbb{C}$

Dalla definizione si evince che se  $\alpha = 0$

$$B(x, 0) = B(0, x) = 0$$

*Osservazione 8.1.* Notiamo che se  $X \equiv \mathbb{C}^n$  una forma sesquilineare in  $X$  sarebbe anche bilineare.

Ad ogni forma sesquilineare è possibile associare una forma quadratica nel modo seguente.

**Definizione 8.2.** Chiamiamo forma quadratica associata alla forma sesquilineare  $B$  la funzione  $\hat{B} : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $x \in X \mapsto \hat{B}(x) := B(x, x) \in \mathbb{C}$ .

Dalla definizione si nota che

$$\hat{B}(\alpha x) = B(\alpha x, \alpha x) = |\alpha|^2 \hat{B}(x)$$

inoltre vale anche la seguente proprietà

$$\begin{aligned} \hat{B}(x + y) &= B(x + y, x + y) = B(x, x) + B(x, y) + B(y, x) + B(y, y) \\ &= \hat{B}(x) + \hat{B}(y) + B(x, y) + B(y, x) \end{aligned}$$

*Esempio 8.1.* Se  $X \equiv \mathbb{C}^n$  e  $B(x, y) = (x, y)$ , allora  $\hat{B}(x) = \|x\|^2$

Ovviamente se viene assegnata una forma sesquilineare è sempre possibile associarvi una forma quadratica tramite la definizione, tuttavia si dimostra che è valido anche l'opposto, cioè che assegnata  $\widehat{B}$  è possibile risalire a  $B$  tramite la seguente formula, detta indentità di polarizzazione:

$$B(x, y) = \frac{1}{4}(\widehat{B}(x + y) - \widehat{B}(x - y)) - \frac{i}{4}(\widehat{B}(x + iy) - \widehat{B}(x - iy))$$

Dunque le proprietà valide per una forma sesquilineare sono valide anche per la forma quadratica associata e viceversa.

**Definizione 8.3** (Forma sesquilineare hermitiana). Una forma sesquilineare  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  è detta hermitiana se

$$B(x, y) = \overline{B(y, x)} \quad \forall x, y \in X$$

*Osservazione 8.2.* Se la forma sesquilineare  $B$  è hermitiana la forma quadratica associata  $\widehat{B}(x)$  sarà sempre reale, infatti

$$\widehat{B}(x) = B(x, x) = \overline{B(x, x)}$$

**Definizione 8.4** (Forma sesquilineare non degenera). Una forma sesquilineare  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  è detta non degenera se

$$\begin{aligned} B(x, y) = 0 \quad \forall x \in X &\implies y = 0 \quad \text{e} \\ B(x, y) = 0 \quad \forall y \in X &\implies x = 0 \end{aligned}$$

**Definizione 8.5** (Forma quadratica non negativa). Una forma quadratica  $\widehat{B} : X \rightarrow \mathbb{C}$  è detta non negativa se  $\forall x \in X, \widehat{B}(x) \in \mathbb{R}_0^+$

**Definizione 8.6** (Forma quadratica definita positiva). Una forma quadratica  $\widehat{B} : X \rightarrow \mathbb{C}$  è detta definita positiva se è non negativa e se  $\widehat{B}(x) = 0$  implica  $x = 0$ .

*Osservazione 8.3.* Se una forma quadratica è definita positiva, allora la forma sesquilineare associata è non degenera ed hermitiana.

**Teorema 8.1** (Disuguaglianza di Schwartz). Sia  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  una forma sesquilineare hermitiana e sia la forma quadratica associata definita positiva, allora  $\forall x, y \in X$

$$|B(x, y)|^2 \leq \widehat{B}(x) \cdot \widehat{B}(y)$$

*Dimostrazione.* Sia  $\alpha \in \mathbb{C}$ , allora:

$$\begin{aligned} \widehat{B}(x + \alpha y) &= B(x + \alpha y, x + \alpha y) = B(x, x + \alpha y) + \overline{\alpha} B(y, x + \alpha y) = \\ &= \widehat{B}(x) + \alpha B(x, y) + \overline{\alpha} B(y, x) + |\alpha|^2 \widehat{B}(y) = \\ &= \widehat{B}(x) + |\alpha|^2 \widehat{B}(y) + 2 \operatorname{Re}(\alpha B(x, y)) \end{aligned}$$

Se  $\widehat{B}(y) = 0$  allora  $y = 0$  e la tesi è banale, sia allora  $\widehat{B}(y) \neq 0$ ; siccome l'uguaglianza è valida per ogni valore di  $\alpha$  consideriamo il caso in cui

$$\alpha = -\frac{\overline{B(x, y)}}{\widehat{B}(y)}$$

Sostituendo otteniamo

$$\widehat{B}(x) + \frac{|B(x, y)|^2}{\widehat{B}(y)^2} \widehat{B}(y) - 2 \frac{|B(x, y)|^2}{\widehat{B}(y)} \geq 0$$

Da cui

$$\widehat{B}(x) \cdot \widehat{B}(y) \geq |B(x, y)|^2$$

□

*Osservazione 8.4.* La disuguaglianza di Schwartz diventa un'uguaglianza se e solo se  $x$  e  $y$  sono linearmente dipendenti.

*Osservazione 8.5.* Se una forma quadratica è non negativa allora è possibile definire un'applicazione  $N_B : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$

$$N_B(x) := \sqrt{\widehat{B}(x)}$$

tale che  $N_B$  è una seminorma. Se  $\widehat{B}$  è definita positiva, allora  $N_B$  come sopra diventa una norma. Proviamo che vale la disuguaglianza triangolare, che è l'unica proprietà non banale di  $N_B$  così definita.

$$N_B(x + y)^2 = \widehat{B}(x + y) = \widehat{B}(x) + \widehat{B}(y) + 2 \operatorname{Re}(B(x, y))$$

Poiché  $|B(x, y)| \leq N_B(x) \cdot N_B(y)$  per la disuguaglianza di Schwartz, a maggior ragione

$$|\operatorname{Re}(B(x, y))| \leq |B(x, y)| \leq N_B(x) \cdot N_B(y)$$

quindi

$$N_B(x + y)^2 \leq \widehat{B}(x) + \widehat{B}(y) + 2N_B(x) \cdot N_B(y) = (N_B(x) + N_B(y))^2$$

**Definizione 8.7.** Se  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  è una forma sesquilineare definita positiva, la funzione  $N_B$  come sopra viene detta norma indotta da  $B$ .

**Definizione 8.8** (Prodotto interno). Una forma sesquilineare  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  hermitiana e definita positiva è detta prodotto interno, in tal caso scriveremo

$$B(x, y) = (x|y)$$

Il prodotto interno gode delle seguenti proprietà, che sono un riassunto di quello visto fino ad ora:

- (i)  $(x + x'|y) = (x|y) + (x'|y)$
- (ii)  $(\alpha x|y) = \overline{\alpha}(x|y)$

- (iii)  $(x|y) = \overline{(y|x)}$
- (iv)  $(x|x) \geq 0 \quad \forall x \in X$
- (v)  $(x|x) = 0 \Rightarrow x = 0$
- (vi)  $|(x|y)|^2 \leq (x|x) \cdot (y|y)$
- (vii)  $\sqrt{(x+y|x+y)} \leq \sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)}$

## 8.2 SPAZI PREHILBERTIANI E HILBERTIANI

**Definizione 8.9** (Spazio prehilbertiano). Uno spazio lineare  $X$  è detto prehilbertiano se dotato di prodotto interno.

**Definizione 8.10** (Spazio di Hilbert). Diciamo spazio di Hilbert uno spazio lineare, dotato di prodotto interno e completo rispetto alla norma indotta dal prodotto interno.

**Proposizione 8.1.** Ogni spazio prehilbertiano finito dimensionale è anche completo (cioè hilbertiano).

*Osservazione 8.6.* Poiché ogni spazio topologico completo è chiuso, si può dimostrare che ogni sottovarietà lineare (sottospazio lineare) chiusa di uno spazio di Hilbert è completa, quindi è a sua volta uno spazio di Hilbert.

**Definizione 8.11** (isomorfismo). Dati due spazi di Hilbert,  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , un'applicazione  $U : \mathcal{H}_1 \rightarrow \mathcal{H}_2$  è detta *isomorfismo* se

- (i)  $U(x+y) = U(x) + U(y)$ ;
- (ii)  $U(\alpha x) = \alpha U(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$ ;
- (iii)  $U$  è suriettiva tra  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ ;
- (iv)  $U$  è invertibile tra  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ ;
- (v)  $(U(x)|U(y))_{\mathcal{H}_2} = (x|y)_{\mathcal{H}_1}$ .

Inoltre, dato uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , posso definire le seguenti applicazioni

- (i)  $L_y = (y|\cdot)$ , questa applicazione, definita per ogni  $y \in \mathcal{H}$  è una funzione  $L_y : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$  e mappa un generico  $x$  in  $L_y(x) = (y|x)$ ;
- (ii)  $L_x = (\cdot|x)$ , questa applicazione, analogamente alla precedente è definita per ogni  $x \in \mathcal{H}$  e mappa un generico  $y$  in  $L_x(y) = (y|x)$ ;

**Teorema 8.2.** Le applicazioni  $L_y$  e  $L_x$  sopra definite sono uniformemente continue



*Dimostrazione.* Dimostriamo, per esempio, che la funzione  $L_y$  è uniformemente continua. Scegliamo due punti  $x$  e  $x'$  in  $\mathcal{H}$  e valutiamo la differenza

$$|(y|x') - (y|x)| = |(y|x' - x)|$$

dalla disuguaglianza di Schwartz otteniamo

$$|(y|x') - (y|x)| \leq \|y\| \|x - x'\|$$

cioè

$$|L_y(x') - L_y(x)| \leq \|y\| \|x - x'\|$$

quindi abbiamo dimostrato che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  definito come  $\delta = \frac{\varepsilon}{\|y\|}$  tale che  $\forall x, x' \in \mathcal{H}$  tali che

$$\|x - x'\| < \delta \Rightarrow |L_y(x') - L_y(x)| < \varepsilon$$

Una dimostrazione del tutto analoga è valida, mutatis mutandis, per la funzione  $L_x$ .  $\square$

**Corollario 8.2.1.** *Si  $\{x_n\}$  una successione di elementi in  $\mathcal{H}$ , convergente a  $x \in \mathcal{H}$  per  $n \rightarrow \infty$ , allora*

$$\forall y \in \mathcal{H} \quad (x_n|y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (x|y)$$

*Dimostrazione.*  $|(x_n|y) - (x|y)| \leq \|y\| \|x_n - x\|$  ma  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ , quindi  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  tale che  $\forall n \geq N$

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

quindi,  $\forall n \geq N$

$$|(x_n|y) - (x|y)| \leq \|y\| \varepsilon$$

cioè la tesi.  $\square$

Questo tipo di convergenza è detto *convergenza debole* della successione, poiché se una successione converge debolmente non è detto che converga, mentre l'opposto è sempre vero per il teorema precedente.

**Teorema 8.3.** *Se  $\{x_n\}$  converge a  $x$  debolmente e  $\|x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|$ , allora  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ .*

*Dimostrazione.* Per la definizione di convergenza debole,  $\forall x \in \mathcal{H}$

$$(x_n|x) \rightarrow (x|x) \quad \text{per } n \rightarrow +\infty$$

e dunque, ponendo  $y = x$

$$(x_n|x) \rightarrow \|x\|^2$$

Valutiamo ora la convergenza di  $\{x_n\}$

$$\begin{aligned} \|x_n - x\|^2 &= (x_n - x|x_n - x) = \\ &= (x_n|x_n) - (x_n|x) - (x|x_n) + (x|x) = \\ &= \|x_n\|^2 - 2\operatorname{Re}(x_n|x) + \|x\|^2 \rightarrow \|x\|^2 - 2\|x\|^2 + \|x\|^2 = 0 \end{aligned}$$

cioè la tesi.  $\square$

**Definizione 8.12.** Dati due elementi di uno spazio di Hilbert  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ , diremo che  $\mathbf{x}$  è *ortogonale* a  $\mathbf{y}$  se

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$$

e scriveremo  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ .

*Osservazione 8.7.* Osserviamo che, essendo  $(\mathbf{x}|\mathbf{0}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ , allora  $\mathbf{0}$  è ortogonale a tutti gli elementi dello spazio.

*Osservazione 8.8.* Siccome  $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , allora  $\mathbf{0}$  è l'unico elemento ortogonale a se stesso.

**Proposizione 8.2.** Se  $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$  allora vale il teorema di Pitagora

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2$$

*Dimostrazione.* Calcoliamo la norma della somma dei quadrati dei due vettori, tenendo conto del fatto che essi sono ortogonali ( $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0$ )

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x} + \mathbf{y}|\mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{x}|\mathbf{x}) + (\mathbf{y}|\mathbf{y}) + 2\operatorname{Re}((\mathbf{x}|\mathbf{y})) = \|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \quad \square \end{aligned}$$

**Teorema 8.4.** Siano  $\mathcal{S}, \mathcal{Q} \subset \mathcal{H}$  tali che  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{S}$ , allora  $\exists \mathbf{x} \in \mathcal{S}$  tale che  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{Q}$   $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ .

**Definizione 8.13** (Complemento ortogonale). Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e sia  $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ , si chiama *complemento ortogonale* di  $\mathcal{S}$  l'insieme

$$\mathcal{S}^\perp := \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : (\mathbf{y}|\mathbf{x}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$$

Dalla definizione è immediato che  $\{\mathbf{0}\}^\perp = \mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}^\perp = \{\mathbf{0}\}$ .

**Proposizione 8.3.** Per ogni sottoinsieme  $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{S}^\perp$  è un sottospazio di Hilbert completo.

*Dimostrazione.* Siccome  $\mathcal{S}^\perp$  è una sottovarietà lineare di  $\mathcal{H}$ , bisogna solo dimostrare che è chiuso. Sia allora  $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathcal{S}^\perp$  una successione di Cauchy, siccome  $\mathcal{H}$  è di Banach esiste il limite  $\tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}$  di tale successione.

Sia  $\mathbf{y} \in \mathcal{S}$ , allora  $(\mathbf{x}_n|\mathbf{y}) = 0 \ \forall n$ .

$$0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\mathbf{x}_n|\mathbf{y}) = (\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n|\mathbf{y}) = (\tilde{\mathbf{x}}|\mathbf{y}) \implies \tilde{\mathbf{x}} \in \mathcal{S}^\perp$$

Il secondo passaggio è lecito per la continuità di  $(\cdot|\mathbf{y})$ .  $\square$

**Proposizione 8.4.** Sia  $\mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ , allora  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp \subseteq \{\mathbf{0}\}$

*Dimostrazione.* Se  $\mathbf{x} \in \mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp$ , allora  $(\mathbf{x}|\mathbf{x}) = 0$  che implica per la definizione di prodotto interno  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . Essendo  $\mathcal{S}^\perp$  spazio vettoriale  $\mathbf{0} \in \mathcal{S}^\perp$ , se  $\mathbf{0} \in \mathcal{S}$  allora vale l'uguale, altrimenti vale l'inclusione, cioè  $\mathcal{S} \cap \mathcal{S}^\perp = \emptyset$ .  $\square$

*Osservazione 8.9.* Da questa proprietà è immediato notare che  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}^{\perp\perp}$ , infatti dalla definizione

$$\mathcal{S}^{\perp\perp} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : (\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0 \ \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$$

si ha che  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}$

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}^{\perp}$$

cioè  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}^{\perp\perp}$ . Tuttavia per la proposizione precedente anche  $\mathbf{0} \in \mathcal{S}^{\perp\perp}$ , anche se può essere  $\mathbf{0} \notin \mathcal{S}$ .

È dunque ovvio dalle osservazioni precedenti che:

(i) Se  $\mathcal{S}$  è sottospazio di Hilbert, allora  $\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\perp\perp}$ .

(ii)  $\mathcal{S}^{\perp\perp\perp} = \mathcal{S}^{\perp}$ .

(iii)  $\overline{\mathcal{S}}^{\perp} = \mathcal{S}^{\perp}$

**Proposizione 8.5.** Sia  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{S} \subset \mathcal{H}$ , allora  $\mathcal{S}^{\perp} \subseteq \mathcal{Q}^{\perp}$ .

*Dimostrazione.* Se per assurdo fosse  $\mathcal{Q}^{\perp} \subset \mathcal{S}^{\perp}$ , allora esisterebbe  $\mathbf{x} \in \mathcal{S}^{\perp}$ ,  $\mathbf{x} \notin \mathcal{Q}^{\perp}$ , tale che  $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0 \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{S}$ . Tuttavia poichè per ipotesi abbiamo  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{S}$ , allora a maggior ragione  $(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = 0 \ \forall \mathbf{y} \in \mathcal{Q}$ , assurdo.  $\square$

### 8.3 SPAZI IN SOMMA ORTOGONALE

**Definizione 8.14.** Siano  $\mathcal{S}, \mathcal{Q} \subset \mathcal{H}$ , diremo che  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{Q}$  sono ortogonali, e scriveremo  $\mathcal{S} \perp \mathcal{Q}$ , se  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{Q}^{\perp}$ .

In questo caso  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}^{\perp\perp} \subseteq \mathcal{S}^{\perp}$ , cioè vale anche che  $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{S}^{\perp}$ .

Consideriamo due sottospazi di uno spazio di Hilbert,  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{Q}$ , in generele il sottospazio

$$(\mathcal{S} + \mathcal{Q}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = \mathbf{q} + \mathbf{s}, \mathbf{q} \in \mathcal{Q}, \mathbf{s} \in \mathcal{S},\}$$

non è un sottospazio di Hilbert.

**Teorema 8.5.** Se  $\mathcal{S} \perp \mathcal{Q}$ ,  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{Q}$  sottospazi di Hilbert, allora  $\mathcal{S} + \mathcal{Q}$  è un sottospazio di Hilbert. In tal caso scriveremo  $\mathcal{S} + \mathcal{Q} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{Q}$ .

*Dimostrazione.* Bisogna dimostrare che  $\mathcal{S} \oplus \mathcal{Q}$  contiene i limiti di ogni successione convergente. Sia  $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathcal{S} \oplus \mathcal{Q}$  una successione di Cauchy, allora per ogni  $n$  si può scrivere

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{s}_n + \mathbf{q}_n$$

per certe  $\{\mathbf{s}_n\} \subset \mathcal{S}$  e  $\{\mathbf{q}_n\} \subset \mathcal{Q}$ .

Siccome uno spazio di Hilbert è di Banach,  $\exists \mathbf{x}$  t.c.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_n = \mathbf{x}$ . Per le ipotesi su  $\{\mathbf{x}_n\}$ ,  $\forall \epsilon > 0 \ \exists N$  t.c.  $\forall n, m > N$

$$\epsilon^2 > \|\mathbf{x}_n - \mathbf{x}_m\|^2 = \|\mathbf{q}_n + \mathbf{s}_n - \mathbf{q}_m - \mathbf{s}_m\|^2 = \|\mathbf{q}_n - \mathbf{q}_m\|^2 + \|\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_m\|^2$$

ove l'ultimo passaggio discende dal teorema di Pitagora in spazi dotati di prodotto interno.

Dunque le due successioni  $\{s_n\}$  e  $\{q_n\}$  sono di Cauchy, e poiché  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{Q}$  sono sottospazi di Hilbert, anche  $\{s_n\}$  e  $\{q_n\}$  avranno limite  $s \in \mathcal{S}$  e  $q \in \mathcal{Q}$  rispettivamente.

Segue che

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n + s_n = q + s \in \mathcal{S} \oplus \mathcal{Q}$$

□

**Teorema 8.6** (Della proiezione). *Sia  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{H}$  un sottospazio di Hilbert, allora  $\mathcal{H} = \mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^\perp$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $\mathcal{Q} \oplus \mathcal{Q}^\perp =: \mathcal{S} \subseteq \mathcal{H}$ ; si vuole dimostrare che vale l'uguaglianza fra  $\mathcal{S}$  e  $\mathcal{H}$ .

Siccome  $\mathcal{Q} \subset \mathcal{S}$  e  $\mathcal{Q}^\perp \subset \mathcal{S}$  per l'osservazione 8.9 abbiamo che  $\mathcal{S}^\perp \subset \mathcal{Q}^\perp$  e  $\mathcal{S}^\perp \subset \mathcal{Q}^{\perp\perp}$ . Per cui

$$\mathcal{S}^\perp \subseteq \mathcal{Q}^\perp \cap \mathcal{Q}^{\perp\perp} = \{0\}$$

da cui  $\mathcal{S}^\perp = \{0\}$ .

Possiamo allora scrivere che

$$\mathcal{S}^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$$

essendo però  $\mathcal{S}$  spazio vettoriale, concludiamo che

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\perp\perp} = \mathcal{H}$$

□

Questo tipo di decomposizione di uno spazio di Hilbert in spazi ortogonali può essere generalizzata ad una successione al più numerabile di sottospazi di Hilbert  $\{\mathcal{Q}_n\}$  fra loro ortogonali. Se si trova tale successione, allora si potrà scrivere

$$\mathcal{H} = \sum_{n=1}^{+\infty} \oplus \mathcal{Q}_n$$

Se prendiamo  $\mathcal{Q}_n = \text{span}\{q_n\}$ , ove i  $q_i$  sono elementi dello spazio di Hilbert fra loro ortogonali, allora possiamo pensare di scrivere  $\mathcal{H} = \text{span}\{q_1, q_2, \dots\}$ . Questo fatto verrà trattato nella sezione successiva.

## 8.4 SISTEMI ORTONORMALI COMPLETI

I vettori degli spazi dotati di prodotto interno possono essere espressi come combinazioni lineari infinite di opportuni vettori, in genere appartenenti a basi i cui vettori hanno norma unitaria e siano mutuamente ortogonali (basi ortonormali). Per questo motivo introdurremo il concetto di *sistema ortonormale*.

**Definizione 8.15.** Sia  $\{\mathbf{u}_\alpha\}$  un insieme, anche infinito e non numerabile, di vettori non nulli in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ .  $\{\mathbf{u}_\alpha\}$  si dirà *ortogonale* se  $(\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{u}_{\alpha'}) = 0$  per ogni  $\alpha \neq \alpha'$ . Inoltre  $\{\mathbf{u}_\alpha\}$  si dirà *ortonormale* se  $\|\mathbf{u}_\alpha\| = 1$ .

*Osservazione 8.10.* In sintesi possiamo dire che, per un sistema ortonormale di vettori (s.o.n.) in uno spazio di Hilbert vale

$$(\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{u}_{\alpha'}) = \delta_{\alpha\alpha'}$$

*Esempio 8.2.* Come abbiamo già visto, nello spazio  $\mathbb{C}^n$ , ogni vettore  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$  poteva essere espresso rispetto alla base ortonormale  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  tramite

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_i|\mathbf{x}) \mathbf{e}_i$$

**Definizione 8.16** (Coefficienti di Fourier). Sia  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$  un vettore in uno spazio di Hilbert dotato di un sistema ortonormale  $\{\mathbf{u}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ . Si chiamano *coefficienti di Fourier* rispetto a tale sistema i numeri complessi

$$\eta_\alpha = (\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x})$$

**Proposizione 8.6.** Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert, allora valgono le seguenti proprietà

(i) Se in  $\mathcal{H}$  consideriamo un sistema ortonormale finito  $\{\mathbf{u}_i\}_{i=1, \dots, n}$  allora

$$\sum_{i=1}^n |(\mathbf{u}_i|\mathbf{x})|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

(ii) Se in  $\mathcal{H}$  consideriamo un generico s.o.n.  $\{\mathbf{u}_\alpha\}_{\alpha \in I}$ , allora per ogni elemento  $\mathbf{x}$  di  $\mathcal{H}$  il numero di coefficienti di Fourier  $\eta_\alpha = (\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x})$  diversi da 0 è al più numerabile

(iii) Se  $\{\mathbf{u}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  è un s.o.n. in  $\mathcal{H}$  allora,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$  vale la disuguaglianza di Bessel:

$$\sum_{\alpha \in I} |(\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x})|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo la (i). Iniziamo considerando la disuguaglianza

$$\left\| \mathbf{x} - \sum_{i=1}^n (\mathbf{u}_i|\mathbf{x}) \mathbf{u}_i \right\|^2 \geq 0$$

e riscriviamola in termini del prodotto interno

$$\begin{aligned}
 \left\| x - \sum_{i=1}^n (u_i | x) u_i \right\|^2 &= \left( x - \sum_{i=1}^n (u_i | x) u_i \mid x - \sum_{j=1}^n (u_j | x) u_j \right) \\
 &= (x | x) - \sum_{j=1}^n (u_j | x) (x | u_j) - \sum_{i=1}^n \overline{(u_i | x)} (u_i | x) \\
 &\quad + \sum_{i,j=1}^n \overline{(u_i | x)} (u_j | x) (u_i | u_j) \\
 &= \|x\|^2 - 2 \sum_{i=1}^n |(u_i | x)|^2 + \sum_{i=1}^n |(u_i | x)|^2 \\
 &= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |(u_i | x)|^2
 \end{aligned}$$

da cui si ha la tesi.

Dimostriamo ora il punto (ii). Siano

$$\begin{aligned}
 F &= \{ |(u_\alpha | x)|^2 : |(u_\alpha | x)|^2 \neq 0 \} \\
 F_n &= \{ |(u_\alpha | x)|^2 : 1/n \leq |(u_\alpha | x)|^2 \}
 \end{aligned}$$

allora

$$F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$

Se verifichiamo che  $F_n$  possiede al più  $n\|x\|^2$  elementi abbiamo anche dimostrato l'asserto. Consideriamo allora un qualsiasi sottoinsieme  $F_k \subseteq F_n$ , composto di  $k$  elementi, poichè questi sono elementi di  $F_n$ ,  $\forall u_{\alpha_j} \in F_k$ ,  $j = 1, \dots, k$

$$\frac{1}{n} \leq |(u_{\alpha_j} | x)|^2$$

da cui, per il punto (i),  $\forall n$

$$\frac{k}{n} \leq \sum_{j=1}^k |(u_{\alpha_j} | x)|^2 \leq \|x\|^2$$

dunque  $k \leq n\|x\|^2$ . Cioè ogni sottoinsieme finito di  $F_n$  non può contenere più di  $n\|x\|^2$  elementi, quindi  $F$  sarà al più infinito numerabile.

Con la disuguaglianza sopra mostrata abbiamo anche provato il punto (iii).  $\square$

**Teorema 8.7** (di Fisher-Riesz). *Sia  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un s.o.n. infinito numerabile in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ . Allora valgono le seguenti proprietà*

- (i) *Se  $\{\alpha_n\}$  è una generica successione in  $\mathcal{H}$  allora la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n u_n$  converge se e solo se  $\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2$  converge.*

- (ii) Nel caso in cui la successione converga, allora esiste un unico elemento  $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n$  in  $\mathcal{H}$  tale che gli elementi della successione siano i coefficienti di Fourier di  $\mathbf{x}$ , cioè  $\alpha_n = (\mathbf{u}_n | \mathbf{x})$  e  $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2$ .

*Dimostrazione.* (i) Consideriamo le somme parziali  $s_n$  e  $\sigma_n$  delle due serie

$$s_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i \quad \sigma_n = \sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2$$

Prendiamo ora  $n > m$  e valutiamo la differenza

$$\begin{aligned} \|s_n - s_m\|^2 &= \left\| \sum_{i=m+1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i \right\|^2 \\ &= \left( \sum_{i=m+1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i \middle| \sum_{j=m+1}^n \alpha_j \mathbf{u}_j \right) = \\ &= \sum_{i,j=m+1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_j \underbrace{(\mathbf{u}_i | \mathbf{u}_j)}_{\delta_{ij}} = \sum_{i=m+1}^n \overline{\alpha_i} \alpha_i \\ &= |\sigma_n - \sigma_m| \end{aligned}$$

Dall'uguaglianza a cui siamo giunti possiamo osservare che la successione delle somme parziali  $s_n$  converge in  $\mathcal{H}$  se e solo se la successione delle somme parziali  $\sigma_n$  converge in  $\mathbb{R}$ .

- (ii) Consideriamo l'elemento  $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n$ . Fissato un  $k$  osserviamo che vale la seguente uguaglianza

$$(\mathbf{u}_k | \mathbf{x} - \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \mathbf{u}_i) = (\mathbf{u}_k | \mathbf{x}) - \alpha_k$$

Considerando questa uguaglianza valutiamo la distanza tra l'elemento  $k$  della successione,  $\alpha_k$  dal  $k$ -esimo coefficiente di Fourier di  $\mathbf{x}$ ,  $(\mathbf{u}_k | \mathbf{x})$ , otteniamo, applicando la disuguaglianza di Schwartz

$$\begin{aligned} |(\mathbf{u}_k | \mathbf{x}) - \alpha_k| &= |(\mathbf{u}_k | \mathbf{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i)| \\ &\leq \|\mathbf{u}_k\| \|\mathbf{x} - \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{u}_i\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

quindi  $\alpha_k = (\mathbf{u}_k | \mathbf{x})$ . Da questo segue che  $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_n | \mathbf{x}) \mathbf{u}_n$  e, quindi

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|^2 &= \left\| \sum_{i=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_i | \mathbf{x}) \mathbf{u}_i \right\|^2 \\ &= \sum_{n,m=1}^{+\infty} \overline{(\mathbf{u}_n | \mathbf{x})} (\mathbf{u}_m | \mathbf{x}) (\mathbf{u}_n | \mathbf{u}_m) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} |(\mathbf{u}_n | \mathbf{x})|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 \end{aligned}$$

□

Riassumiamo il significato del teorema di Fisher-Riesz.

Se  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è un s.o.n. in uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\{\alpha_n\}$  è una successione in tale spazio t.c.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 < +\infty$$

allora la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n < +\infty$  e gli  $\alpha_n$  sono i coefficienti di Fourier di un elemento  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ ,  $\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n$ .

È lecito chiedersi se vale anche il viceversa, cioè se assegnato  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$  e un sistema ortogonale  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , allora, posto  $\alpha_n = (\mathbf{u}_n | \mathbf{x})$ , possiamo dire che

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n < +\infty$$

Poiché per la disuguaglianza di Bessel

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(\mathbf{u}_n | \mathbf{x})|^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

possiamo applicare il teorema di Fisher-Riesz e affermare che anche la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n$$

converge.

Dunque  $\exists \mathbf{x}' \in \mathcal{H}$  t.c.  $\mathbf{x}' = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \mathbf{u}_n$ , tale per cui

$$(\mathbf{u}_n | \mathbf{x}) = (\mathbf{u}_n | \mathbf{x}')$$

e dunque  $(\mathbf{u}_n | \mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0$ , cioè  $\mathbf{u}_n \perp \mathbf{x} - \mathbf{x}' \forall n \in \mathbb{N}$ .

Per poter affermare che  $\mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{0}$  deve essere vero, essendo il prodotto interno non degenerare, che  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H} \mathbf{y} \perp \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ , che in generale non è vero, in quanto non è detto che i  $\{\mathbf{u}_n\}$  generino  $\mathcal{H}$ , cioè non è detto che si possa scrivere  $\mathbf{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n \mathbf{u}_n$  per certi  $\beta_n \in \mathbb{C}$ .

**Definizione 8.17** (Sistema ortonormale completo). Diciamo che un s.o.n.  $\{\mathbf{u}_n\}$  è un sistema ortonormale completo (in breve un s.o.n.c.) per  $\mathcal{H}$ , se  $\mathcal{H} = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots\}$ .

Se  $\{\mathbf{u}_n\}$  è un s.o.n.c., allora  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$

$$\mathbf{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_n | \mathbf{x}) \mathbf{u}_n$$

la disuguaglianza di Bessel e il teorema di Fisher-Riesz assicurano la convergenza di questa serie.

Riassumiamo i risultati ottenuti nel seguente teorema.



**Teorema 8.8.** Sia  $\{\mathbf{u}_n\} \subset \mathcal{H}$  un s.o.n., le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- (i)  $\{\mathbf{u}_n\}$  è un s.o.n.c.
- (ii)  $\overline{\text{span}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots)} = \mathcal{H}$
- (iii)  $(\mathbf{u}_n | \mathbf{x}) = 0 \ \forall n \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- (iv)  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H} \ \mathbf{x} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_n | \mathbf{x}) \mathbf{u}_n$
- (v) (Prima identità di Parseval)  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \sum_{n=1}^{+\infty} (\mathbf{x} | \mathbf{u}_n) (\mathbf{u}_n | \mathbf{y})$$

- (vi) (Seconda identità di Parseval)  $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |(\mathbf{u}_n | \mathbf{x})|^2$

Ora vediamo quando uno spazio di Hilbert ammette l'esistenza di un s.o.n.c.

In generale possiamo dividere gli spazi di Hilbert in due categorie

- *Separabili*, cioè quelli che contengono un sottoinsieme numerabile denso.
- *Non separabili*.

**Proposizione 8.7.** Se  $\mathcal{H}$  è uno spazio di Hilbert separabile tutti i suoi sistemi ortonormali sono al più infinito numerabili.

*Dimostrazione.* Siccome  $\mathcal{H}$  è separabile  $\exists \{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$  denso in  $\mathcal{H}$ . Sia  $\{\mathbf{u}_\alpha\}$  un s.o.n. e consideriamo l'insieme delle sfere  $s_1(\mathbf{u}_\alpha)$  di raggio unitario centrate in  $\mathbf{u}_\alpha$ ; tutte queste sfere sono disgiunte poichè

$$\|\mathbf{u}_{\alpha_i} - \mathbf{u}_{\alpha_j}\| = \sqrt{\|\mathbf{u}_{\alpha_i}\|^2 + \|\mathbf{u}_{\alpha_j}\|^2} = \sqrt{2}$$

Siccome  $\{\mathbf{x}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è denso in  $\mathcal{H}$ , ogni sfera contiene almeno un elemento di tale insieme numerabile, e poichè le sfere sono disgiunte il loro insieme è al più numerabile, cioè i  $\{\mathbf{u}_\alpha\}$  sono al più numerabili.  $\square$

Se uno spazio di Hilbert è separabile è sempre possibile definire un s.o.n.c. grazie all'algoritmo di Gram-Schmidt.

**Definizione 8.18** (Dimensione ortogonale). Per *dimensione ortogonale* di uno spazio con prodotto interno si intende la cardinalità comune a tutti i suoi sistemi ortonormali completi.

Grazie alla definizione possiamo dividere gli spazi di Hilbert separabili in infinito dimensionali e finito dimensionali. Sugli spazi finito dimensionali è sempre possibile definire un s.o.n.c., e la dimensione dello spazio coincide col numero di elementi della base. Se il s.o.n.c. ha un numero infinito di elementi allora lo spazio di Hilbert ha dimensione infinita.

**Teorema 8.9.** Se due spazi di Hilbert  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}'$  hanno due s.o.n.c. di cardinalità uguale, allora sono isomorfi.

## 8.5 ESEMPI DI SPAZI DI HILBERT

### 8.5.1 $\mathbb{C}^n$

Lo spazio vettoriale  $\mathbb{C}^n$  sul campo  $\mathbb{C}$  dotato del prodotto interno

$$(z, w) = \sum_{i=1}^n \bar{z}_i w_i$$

è uno spazio prehilbertiano finito, e dunque di Hilbert. È immediato verificare che un s.o.n.c. per  $\mathbb{C}^n$  è

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ e_2 &= (0, 1, \dots, 0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

oppure

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &= (i, 0, \dots, 0) \\ \tilde{e}_2 &= (0, i, \dots, 0) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Entrambi i s.o.n.c. hanno cardinalità  $n$ , quindi  $\dim(\mathbb{C}^n) = n$ .

Possiamo dire che separatamente gli  $\{e_i\}$  sono un s.o.n.c. di  $\mathbb{R}^n$  e gli  $\{\tilde{e}_j\}$  sono una base di  $i\mathbb{R}^n$ .

### 8.5.2 $\mathcal{C}([a, b])$

Con  $\mathcal{C}([a, b])$  intendiamo l'insieme delle funzioni  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}(\mathbb{R})$  continue. Definiamo il prodotto interno come

$$(f|g) = \int_a^b \bar{f}(x)g(x) dx$$

Siccome le funzioni sono continue su un intervallo chiuso il prodotto interno è ben definito, cioè  $(f|g)$  è finito  $\forall f, g \in \mathcal{C}([a, b])$ .

Verifichiamo che il prodotto interno sopra definito è effettivamente un prodotto interno.

(i)

$$\begin{aligned} (f_1 + f_2|g) &= \int_a^b \overline{f_1 + f_2}(x)g(x) dx \\ &= \int_a^b \bar{f}_1(x)g(x) dx + \int_a^b \bar{f}_2(x)g(x) dx = (f_1|g) + (f_2|g) \end{aligned}$$

$$(ii) (\alpha f|g) = \int_a^b \overline{\alpha f}(x)g(x) dx = \bar{\alpha}(f|g)$$

(iii)

$$\begin{aligned}\overline{(f|g)} &= \overline{\int_a^b \bar{f}(x)g(x) dx} = \int_a^b \overline{\bar{f}(x)g(x)} dx \\ &= \int_a^b f(x)\bar{g}(x) dx = (g|f)\end{aligned}$$

(iv)  $(f|f) = \int_a^b \bar{f}(x)f(x) dx = \int_a^b |f(x)|^2 dx \geq 0$  Inoltre  $\|f\| = \sqrt{(f|f)} = 0$  se e solo se  $f = 0$  q.o.

Quindi  $\mathcal{C}([a, b])$  è uno spazio prehilbertiano con il prodotto interno definito sopra. Mostriamo con un esempio che non può essere uno spazio di Hilbert, cioè che non è completo, sia

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2n(x - \frac{1}{2}) & \frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \\ 0 & \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} < x \leq 1 \end{cases}$$

allora  $\forall n, m > N, n > m$

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\| &= \int_0^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{2m} + \frac{1}{2n}}^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx + \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}}^1 |f_n(x) - f_m(x)|^2 dx = \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}} |-2n(x - \frac{1}{2}) + 2m(x - \frac{1}{2})|^2 dx + \\ &+ \int_{\frac{1}{2} + \frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2m}} |1 - 2m(x - \frac{1}{2})|^2 dx = \\ &= -\frac{1}{3n} + \frac{1}{6m} + \frac{m}{6n^2} \\ &\leq (\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) \xrightarrow{n, m \rightarrow \infty} 0\end{aligned}$$

Quindi le  $\{f_n\}$  convergono, tuttavia la funzione limite

$$f = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

non è continua.

### 8.5.3 $L^2([a, b])$ e $L^2(\mathbb{R})$

Con gli accorgimenti del caso, gli spazi  $L^2([a, b])$  e  $L^2(\mathbb{R})$  si trattano allo stesso modo, quindi concentriamoci sugli spazi  $L^2([a, b])$ .

il prodotto interno fra due funzioni  $f, g \in L^2([a, b])$  può essere definito come

$$(f|g) = \int_a^b \bar{f}(x)g(x) dx$$

La disuguaglianza di Hölder per  $p, q = 2$  permette di assicurare che la definizione è ben posta, infatti

$$\int_a^b |\bar{f}(x)g(x)| \leq \left( \int_a^b |f(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b |g(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < +\infty$$

Si può dimostrare che  $L^2([a, b])$  con il prodotto interno sopra definito è di Banach, e lo stesso vale per  $L^2(\mathbb{R})$  e  $L^2(\mathbb{R}^n)$

#### 8.5.4 $l^2(\mathbb{C})$

Siano  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  due successioni appartenenti ad  $l^2(\mathbb{C})$ , definiamo il prodotto interno come

$$(\{x_n\}|\{y_n\}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{x}_n y_n$$

Sfruttando la disuguaglianza di Hölder come per gli integrali è possibile dimostrare che questa definizione di prodotto interno è ben posta. Si può dimostrare anche che lo spazio  $l^2(\mathbb{C})$  è di Banach, e dunque di Hilbert.

Vediamo ora i principali s.o.n.c. negli spazi di Hilbert  $L^2(\mathbb{R})$  e  $L^2([a, b])$  definiti nel capitolo precedente.

## 9.1 SERIE DI FOURIER

### 9.1.1 Sviluppo in serie di funzioni periodiche

**Definizione 9.1.** Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ . diciamo che  $f$  è periodica se  $\exists T \in \mathbb{R}$  tale che  $f(x + T) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ . Chiamiamo  $T$  periodo della funzione.

**Definizione 9.2** (Funzione generalmente continua). Sia  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ , diciamo che  $f$  è generalmente continua in  $I$  se è continua e limitata in  $I$  ad eccezione di un numero finito di punti di discontinuità.

**Definizione 9.3** (Funzione regolare a tratti). Diciamo che  $f$  è regolare a tratti se  $f$  e  $f'$  sono generalmente continue.

*Osservazione 9.1.* Notiamo che una funzione regolare a tratti è sempre integrabile secondo Lebesgue, e inoltre sarà anche di classe  $L^2$ .

Consideriamo  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  periodica di periodo  $T = 2\pi$  continua o generalmente continua sull'intervallo  $[0, 2\pi]$ , lo scopo della serie di Fourier è di esprimere  $f$  in termini di seni e coseni.

**Teorema 9.1.**  $\{\cos(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{\sin(nx)\}_{n \in \mathbb{N}}$  sono un sistema ortogonale in  $L^2([0, 2\pi])$  e in  $\mathcal{C}([0, 2\pi])$ .

*Dimostrazione.* Calcoliamo tutti i possibili prodotti interni, si noti che essendo il seno e il coseno reali si può ignorare la coniugazione complessa:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos(mx) \cos(nx) dx &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos((m+n)x) + \cos((m-n)x)}{2} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m+n)x) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m-n)x) dx = \\ &= \begin{cases} 2\pi & m = n = 0 \\ \pi & m = n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases} \end{aligned}$$

Analogamente

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin(mx) \sin(nx) dx &= \pi \delta_{m,n} \\ \int_0^{2\pi} \sin(mx) \cos(nx) dx &= 0 \quad \forall m, n\end{aligned}$$

□

Per rendere questo sistema ortogonale un s.o.n. basta passare da

$$\begin{aligned}\sin(nx) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx) \\ \cos(nx) &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)\end{aligned}$$

Ora che abbiamo un s.o.n. in uno spazio di Hilbert possiamo introdurre i coefficienti di Fourier per una funzione  $f$  periodica, continua o generalmente continua. Chiamiamo:

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(0 \cdot t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt, \quad n \neq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt\end{aligned}$$

Siccome si può dimostrare (vedi la sottosezione seguente) che il sistema di seni e coseni scelto genera  $L^2([-\pi, \pi])$ , è lecito sviluppare  $f$  come somma della base ortonormale per il suo coefficiente di Fourier:

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

### 9.1.2 Proprietà della serie di Fourier

**Teorema 9.2** (Disuguaglianza di Bessel). *Se  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$  è generalmente continua, allora vale la disuguaglianza di Bessel per i coefficienti di Fourier sulla base dei seni e coseni:*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$$

*Dimostrazione.* Sia

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Notiamo che, se poniamo  $(\xi_1, \dots, \xi_{2N}) = (a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N)$  e indichiamo  $\{\mu_i\}$  il s.o.n. di seni e coseni

$$\begin{aligned} s_N &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_N^2(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a_0^2}{4} dx + \sum_{n=1}^{2N} \sum_{m=1}^{2N} \xi_n \xi_m \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mu_n(x) \mu_m(x) dx \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{2N} \sum_{m=1}^{2N} \xi_n \xi_m \delta_{m,n} \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{2N} \xi_n^2 \end{aligned}$$

sono stati omessi dal calcolo i doppi prodotti con  $a_0$  che risultano banalmente nulli.

Ora valutiamo il seguente integrale

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) S_N(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} f(x) dx + \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{\pi} \xi_n \int_0^{2\pi} \mu_n f(x) dx \\ &= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{2N} \xi_n^2 = s_N \end{aligned}$$

Infine notiamo che

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (S_N(x) - f(x))^2 dx = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} S_N^2(x) dx - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) S_N(x) dx + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \end{aligned}$$

Dai risultati precedenti abbiamo che

$$s_N - 2s_N + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \geq 0 \implies \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(x) dx \geq s_N$$

per ogni  $N$ . Facendo tendere  $N$  a all'infinito si ha la tesi.  $\square$

**Corollario 9.2.1.** *I coefficienti di Fourier per la base di seni e coseni sono ben definiti per ogni funzione  $f$  generalmente continua.*

**Corollario 9.2.2.**  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = 0$

**Teorema 9.3.** *Sia  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  regolare a tratti e periodica di periodo  $2\pi$  e*

$$\hat{f} = \frac{1}{2} \left[ \lim_{t \rightarrow x^-} f(t) + \lim_{t \rightarrow x^+} f(t) \right] \quad \forall x$$

Allora la successione

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

converge a  $\hat{f}$ .

*Dimostrazione.* Sia

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

bisogna dimostrare che  $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon, x) \text{ t.c. } \forall n \geq N$

$$|S_n - \hat{f}(x)| < \varepsilon$$

Incominciamo a dimostrare l'asserto per le  $x$  in cui  $f(x) = \hat{f}(x)$ , cioè nei punti di continuità di  $x$ . Sia

$$D_N(t) = 1 + 2 \sum_{k=1}^N \cos(kt)$$

La successione  $D_N$  gode delle seguenti proprietà

$$(i) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = 1 \quad \forall N$$

$$(ii) \quad D_N(t) = \frac{\sin \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin(t/2)}$$

$$(iii) \quad S_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x+t) dt$$

La proprietà (ii) si dimostra per induzione, la (iii) adottando il cambio di variabile  $y = x + t$ .

Da queste proprietà segue che

$$\begin{aligned} S_N(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x+t) dt - f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) [f(x+t) - f(x)] dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) t \right]}{\sin(t/2)} [f(x+t) - f(x)] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(Nt) \cot \left( \frac{t}{2} \right) [f(x+t) - f(x)] dt \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(Nt) [f(x+t) - f(x)] dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(Nt) \tilde{g}(t) dt - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(Nt) \hat{h}(t) dt \\ &= \tilde{b}_N - \hat{a}_N \end{aligned}$$

ove  $\tilde{b}_N$  e  $\hat{a}_N$  indicano l'  $N$ -esimo coefficiente di Fourier, rispetto al seno e rispetto al coseno, delle funzioni  $\tilde{g}$  e  $\hat{h}$  definite come sopra. I coefficienti di Fourier sono ben definiti essendo  $\tilde{g}$  e  $\hat{h}$  periodiche di periodo  $2\pi$  in quanto composta di funzioni periodiche. Per il corollario 9.2.2 abbiamo che

$$S_N - f(x) \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad N \rightarrow \infty$$



a patto che  $\tilde{g}$  e  $\hat{h}$  siano integrabili. Per  $\hat{h}$  non ci sono problemi, mentre  $\tilde{g}$  ha una singolarità per  $t = 0$ , tuttavia, calcolando il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \cot\left(\frac{t}{2}\right) [f(x+t) - f(x)] \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{2}{t} t f'(x) = 2f'(x)$$

che è limitata per l'ipotesi che la funzione  $f$  sia regolare a tratti.

Consideriamo ora i punti in cui  $f$  non è continua, per comodità indichiamo con  $x^-$  e  $x^+$  i limiti da sinistra e da destra di  $x$ . Analogamente a quanto già visto possiamo scrivere

$$\begin{aligned} S_N(x) - \hat{f}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x+t) dt - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) f(x+t) dt - \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 D_N(t) f(x+t) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} D_N(t) f(x+t) dt + \\ &\quad - \frac{f(x^+)}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt - \frac{f(x^-)}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt \end{aligned}$$

siccome  $D_N(t)$  è pari, possiamo raccogliere gli integrali nel modo seguente

$$\begin{aligned} S_N(x) - \hat{f}(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) \frac{f(x+t) - f(x^-)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} + \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) \frac{f(x+t) - f(x^+)}{2 \sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

Grazie a questo passaggio possiamo ricondurre i due integrali a due coefficienti di Fourier per i quali varrà la disuguaglianza di Bessel, essendo  $f$  regolare a tratti, e che dunque tenderanno a zero al crescere di  $N$ , cioè la tesi.  $\square$

*Osservazione 9.2.* La convergenza dello sviluppo di Fourier ad una certa funzione  $f$  è dunque uniforme nei punti in cui  $f$  è continua, e puntuale a  $\hat{f}$  nei punti di discontinuità.

Dunque è possibile derivare o integrare la serie nei punti di continuità per ottenere l'integrale o la derivata della funzione.

*Osservazione 9.3.* Lo sviluppo in serie di Fourier è particolarmente utile quando si deve applicare a funzioni di cui si conosce la parità, infatti

(i) Se  $f$  è una funzione pari

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) dt \neq 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos(nt) dt \neq 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = 0 \end{aligned}$$

(ii) Se  $f$  è funzione dispari

$$\begin{aligned}\frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt = 0 \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin(nt) dt \neq 0\end{aligned}$$

### 9.1.3 Sviluppo complesso

Lo sviluppo in serie di seni e coseni di una funzione assume una forma molto più simmetrica ed elegante se quest'ultimi vengono scritti in termini di esponenziali complessi. Lo sviluppo di una funzione in termini di funzioni esponenziali è tanto importante da far sì che spesso la serie di Fourier viene chiamata *serie esponenziale*. Esplicitiamo i passaggi

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \left( a_n \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} - i b_n \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2} \right) \\ &= \underbrace{\frac{a_0}{2}}_{c_0} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ e^{inx} \underbrace{\left( \frac{a_n - ib_n}{2} \right)}_{c_n} + e^{-inx} \underbrace{\left( \frac{a_n + ib_n}{2} \right)}_{c_{-n}} \right] \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}\end{aligned}$$

Per come sono stati definiti, notiamo subito che

$$\begin{aligned}c_n = \bar{c}_{-n} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos(nt) - i \sin(nt)}{2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt\end{aligned}$$

### 9.1.4 Funzioni con periodo arbitrario

Sia  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$  una funzione periodica di periodo  $T = 2L$ , allora la funzione

$$\tilde{f} := f\left(\frac{L}{\pi}x\right)$$

sarà periodica di periodo  $2\pi$ , infatti

$$\tilde{f}(x + 2\pi) = f\left(\frac{L}{\pi}(x + 2\pi)\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x + 2L\right) = f\left(\frac{L}{\pi}x\right) = \tilde{f}(x)$$

Dunque  $\tilde{f}$  è sviluppabile in serie di Fourier come già visto

$$\tilde{f} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{inx}$$

Per definizione di  $\tilde{f}$  abbiamo

$$f(x) = \tilde{f}\left(\frac{\pi}{L}x\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{c}_n e^{in\frac{\pi}{L}x}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{L}{\pi}t\right) e^{-int} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(\tau) e^{-in\frac{\pi}{L}\tau} \frac{\pi}{L} d\tau \\ &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(\tau) e^{-in\frac{\pi}{L}\tau} d\tau \end{aligned}$$

Dunque, riassumendo, è possibile scrivere una qualsiasi funzione  $f$  periodica di periodo  $2L$ , regolare a tratti, come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\frac{\pi}{L}x}$$

ove

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) e^{-in\frac{\pi}{L}t} dt$$

Questa generalizzazione è particolarmente importante, perché ci permette di sviluppare in serie esponenziale anche funzioni non periodiche su un'intervallo arbitrario; grazie ai teoremi visti in precedenza, lo sviluppo convergerà sempre all'interno di tale intervallo.

#### 9.1.5 Sviluppo di funzioni in più variabili

Per evitare confusioni con gli indici, trattiamo funzioni  $f \in L^2([-L_1, L_1] \times [-L_2, L_2]) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}(\mathbb{C})$ ; la generalizzazione a funzione a valori in  $\mathbb{R}^n$  è immediata.

Sia

$$g_y(x) := f(\cdot, y) \mapsto f(x, y) \quad \forall y \in [-L_2, L_2]$$

allora

$$g_y(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(y) e^{in\frac{\pi}{L_1}x}$$

ove

$$c_n(y) = \frac{1}{2L_1} \int_{-L_1}^{L_1} f(t, y) e^{-in\frac{\pi}{L_1}t} dt$$

Dunque  $c_n(y) \in L^2([-L_2, L_2])$ , e dunque è a sua volta sviluppabile in serie di Fourier:

$$c_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} b_{n,m} e^{im \frac{\pi}{L_2} y}$$

con

$$b_{n,m} = \frac{1}{2L_2} \int_{-L_2}^{L_2} c_n u e^{im \frac{\pi}{L_2} u} du$$

Riassumendo abbiamo che possiamo scrivere  $f$  come

$$f(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_{n,m} e^{in \frac{\pi}{L_1} x} e^{im \frac{\pi}{L_2} y}$$

$$b_{m,n} = \frac{1}{4L_1 L_2} \int_{-L_2}^{L_2} du \int_{L_1}^{L_1} f(t, u) e^{-in \frac{\pi}{L_1} t} e^{-im \frac{\pi}{L_2} u} dt$$

## 9.2 POLINOMI DI HERMITE

Un altro esempio di sistema ortonormale completo sullo spazio  $L^2$  è il sistema dei polinomi di Hermite, definiti come le soluzioni polinomiali dell'equazione differenziale

$$(8) \quad y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

detta *equazione di Hermite*. Diversamente questi polinomi possono essere definiti direttamente tramite la loro forma esplicita.

**Definizione 9.4** (Polinomi di Hermite). L' $n$ -esimo polinomio di Hermite è definito dall'equazione

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2})$$

A partire da questa definizione possiamo calcolare i primi termini della base dei polinomi ottenendo

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = 2x$$

$$H_2(x) = 4x^2 - 2$$

...

Inoltre questi polinomi possono essere definiti tramite la loro funzione generatrice

**Definizione 9.5.** I polinomi di Hermite  $H_n$  sono definiti dall'equazione

$$h(x, t) = e^{(2tx - t^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

Possiamo ora dimostrare l'equivalenza tra le definizioni appena date, infatti, derivando la funzione generatrice  $n$  volte rispetto a  $t$ , e valutandola in  $t = 0$  otteniamo proprio  $H_n(x)$

$$\begin{aligned} H_n(x) &= \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{(2tx-t^2)} \Big|_{t=0} = e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{-(t-x)^2} \Big|_{t=0} \\ &= (-1)^n e^{x^2} \frac{\partial^n}{\partial x^n} e^{-x^2} \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio, abbiamo scambiato la derivata rispetto a  $t$  con quella rispetto a  $x$ , notando che se  $f = f(t-x)$ , si ha che  $\frac{\partial}{\partial t} f = -\frac{\partial}{\partial x} f$ . In questo modo siamo giunti ad una definizione dei polinomi di Hermite analoga alla 9.4.

**Proposizione 9.1.** *Vale la seguente uguaglianza*

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$$

*Dimostrazione.* Utilizziamo la funzione generatrice, e deriviamola rispetto a  $x$ ,

$$2te^{(2tx-t^2)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n$$

e, riutilizzando la definizione della funzione generatrice otteniamo

$$2t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n$$

cioè

$$2t \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H'_n(x)}{n!} t^n$$

quindi, uguagliando i termini delle due sommatorie con potenze omologhe otteniamo l'espressione cercata

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x) \quad \square$$

**Proposizione 9.2.** *Se  $H_n(x)$  è l' $n$ -esimo un polinomio di Hermite, allora vale la seguente equazione*

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$$

*Dimostrazione.* Utilizzando ancora la funzione generatrice, possiamo scrivere

$$\frac{d}{dt} h(x, t) = (2x - 2t)e^{2tx-t^2} = n \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$$

sviluppando la funzione generatrice secondo la sua definizione 9.5

$$(2x - 2t) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = n \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^{n-1}$$

Uguagliando ancora i termini con potenze omologhe di  $t$  nelle serie ad ambo i membri otteniamo

$$2x \frac{H_n}{n!}(x) - 2 \frac{H_{n-1}(x)}{(n-1)!} = \frac{H_{n+1}(x)}{n!}$$

quindi otteniamo l'equazione cercata

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x) \quad \square$$

*Osservazione 9.4.* Dalla proposizione appena dimostrata, e dall'equazione precedente riguardante la derivata di un polinomio di Hermite otteniamo immediatamente

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - H'_n(x)$$

quindi, derivando e applicando nuovamente la proposizione 9.1

$$\begin{aligned} H'_{n+1}(x) &= 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x) \\ 2(n+1)H_n &= 2H_n(x) + 2xH'_n(x) - H''_n(x) \\ H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x) &= 0 \end{aligned}$$

quindi i polinomi di Hermite, soddisfano l'equazione differenziale (8) di Hermite.

**Teorema 9.4.** *I polinomi di Hermite formano un sistema ortogonale rispetto al prodotto interno definito da*

$$(H_n(x)|H_m(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx$$

*Dimostrazione.* Iniziamo considerando il seguente integrale, nel caso  $n \neq m$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (H''_n(x) - 2xH'_n(x) + 2nH_n(x)) H_m(x) \\ - (H''_m(x) - 2xH'_m(x) + 2mH_m(x)) H_n(x) dx = 0 \end{aligned}$$

dove l'integrale è ovviamente nullo in quanto entrambi i fattori che vi compaiono soddisfano l'equazione di Hermite. Sviluppando i prodotti otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \{ [H''_n H_m - H''_m H_n] - 2x[H'_n H_m - H'_m H_n] \\ + 2(n-m)H_n H_m \} dx = 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} [e^{-x^2} (H'_n H_m - H'_m H_n)] + 2e^{-x^2} (n-m)H_n H_m dx = 0 \end{aligned}$$

come si può vedere nell'integrale compare una derivata totale rispetto ad  $x$  della funzione  $e^{-x^2} (H'_n H_m - H'_m H_n)$ , prodotto di una funzione esponenziale per una polinomiale. Per questo motivo, tale funzione,

una volta valutata agli estremi, si annulla per qualsiasi valore di  $m$  e  $n$ ; otteniamo quindi solamente il termine

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 2e^{-x^2} (n-m) H_n H_m dx = 0$$

quindi, essendo  $n \neq m$  otteniamo la tesi del teorema

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = 0$$

cioè la base dei polinomi di Hermite è ortogonale rispetto al prodotto interno definito in tal modo.  $\square$

*Osservazione 9.5.* Possiamo ora calcolare il valore della norma indotta dal prodotto interno con

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n^2(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) H_n(x) dx \\ &= \left[ e^{-x^2} H_n(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad + (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (H_n(x)) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (H_n(x)) dx \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio si è utilizzata  $n$  volte la formula di integrazione per parti, e nell'ultimo si è tenuto conto che il termine  $e^{-x^2} H_n(x)$  si annulla agli estremi.

Applicando ora  $n$  volte la formula 9.1 per la derivata di un polinomio di Hermite otteniamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \frac{d^n}{dx^n} (H_n(x)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} 2^n n! = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

Quindi, riassumendo, possiamo dire che  $\forall n, m \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_n(x) H_m(x) dx = \delta_{nm} 2^n n! \sqrt{\pi}$$

**Definizione 9.6.** Possiamo ora introdurre il s.o.n. dei polinomi di Hermite definito come

$$\hat{H}_n(x) = \frac{H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}}$$

Notiamo che i polinomi di Hermite definiti in questo modo rappresentano un sistema ortonormale rispetto all'usuale prodotto interno tra funzioni nello spazio  $L^2$ .

### 9.3 POLINOMI DI LEGENDRE

Un ultimo esempio di s.o.n.c. in  $L^2$  è quello dei *polinomi di Legendre*. Anch'essi, analogamente ai polinomi di Hermite, possono essere definiti come le soluzioni polinomiali dell'equazione differenziale

$$(9) \quad (1-x^2)y''(x) - 2xy'(x) + n(n+1)y(x) = 0$$

detta equazione di Legendre.

I polinomi possono inoltre essere definiti tramite la loro funzione generatrice

**Definizione 9.7.** I polinomi di Legendre sono i  $P_n(x)$  definiti dall'equazione

$$\frac{1}{(1+t^2-2tx)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x)t^n$$

dove la condizione di convergenza per la serie a secondo membro è  $|t| < 1$ .

A partire da questa definizione possiamo scrivere lo sviluppo binomiale della funzione generatrice dei polinomi ed ottenerne i primi termini

$$\begin{aligned} (1+t^2-2tx)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-1/2}{n} (t^2-2tx)^n \\ &= 1 + tx + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}x^2\right)t^2 + \dots \end{aligned}$$

Otteniamo quindi

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= x \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ &\dots \end{aligned}$$

A partire dalla definizione dei polinomi di Legendre tramite la funzione generatrice possiamo anche giungere ad una loro definizione ricorsiva.

**Proposizione 9.3.** Vale la seguente equazione

$$(n+1)P_{n+1}(x) = x(2n+1)P_n(x) - nP_{n-1}(x)$$

*Dimostrazione.* Derivando rispetto a  $t$  entrambi i termini dell'equazione della definizione 9.7 otteniamo

$$-\frac{1}{2} \frac{2t-2x}{(1+t^2-2tx)^{\frac{3}{2}}} = \sum_n n P_n(x) t^{n-1}$$



riscrivendo

$$\frac{x-t}{(1+t^2-2tx)} \frac{1}{(1+t^2-2tx)^{\frac{1}{2}}} = \sum_n^{\infty} n P_n(x) t^{n-1}$$

$$(x-t) \sum_n^{\infty} P_n(x) t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x) n t^{n-1} (1+t^2-2tx)$$

quindi

$$\begin{aligned} & x \sum_n^{\infty} P_n(x) t^n - \sum_n^{\infty} P_n(x) t^{n+1} - n \sum_n^{\infty} P_n(x) t^{n-1} \\ & + \sum_n^{\infty} P_n(x) n t^{n+1} + 2x \sum_n^{\infty} P_n(x) n t^n = 0 \\ & \sum_n^{\infty} x(2n+1) P_n(x) t^n - \sum_n^{\infty} (n+1) P_n(x) t^{n+1} \\ & \sum_n^{\infty} n P_n(x) t^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

quindi, rinominando gli indici nelle varie sommatorie possiamo compattare questa scrittura

$$\sum_{n=0}^{\infty} [x(2n+1) P_n(x) - n P_{n-1}(x) - (n+1) P_{n+1}(x)] t^n = 0$$

considerando ora l'indipendenza dei polinomi di grado differente possiamo affermare che ogni coefficiente di  $t^n$  nella sommatoria debba essere nullo, quindi otteniamo la formula cercata

$$(10) \quad (n+1) P_{n+1}(x) = x(2n+1) P_n(x) - n P_{n-1}(x) \quad \square$$

Da questo teorema è immediato notare che i polinomi di Legendre sono reali e  $P_n$  è un polinomio di grado  $n$ -esimo.

**Teorema 9.5.** *I polinomi di Legendre sono soluzione dell'equazione di Legendre (9).*

*Dimostrazione.* Derivando rispetto a  $x$  la relazione definitoria dei polinomi di Legendre tramite funzione generatrice

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{(1+t^2-2tx)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{\partial}{\partial x} \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n \\ \frac{t}{(1+t^2-2tx)} \frac{1}{(1+t^2-2tx)^{\frac{1}{2}}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x) t^n \\ t \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n &= (1+t^2-2tx) \sum_{n=0}^{+\infty} P'_n(x) t^n \end{aligned}$$

riordinando gli indici e portando tutto al primo membro

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - 2xP'_n(x) + P_n(x)] t^{n+1} = 0$$

da cui

$$(11) \quad P'_{n+1}(x) + P'_{n-1}(x) - 2xP'_n(x) + P_n(x) = 0$$

Operiamo ora sulle equazioni fino ad ora ricavate. Se deriviamo l'equazione (10), la moltiplichiamo per due e la sottraiamo alla (11) otteniamo

$$(12) \quad P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

Sommando ora l'equazione (10) e la (12) otteniamo

$$(13) \quad P'_{n+1}(x) = (n+1)P_n(x) + xP'_n(x)$$

Sottraendo invece le stesse due equazioni

$$(14) \quad P'_{n-1}(x) = -nP_n(x) + xP'_n(x)$$

Infine, operando la sostituzione  $n = n' - 1$  nella (13) e sommandola alla (14) moltiplicata per  $x$  otteniamo

$$(15) \quad (1-x^2)P'_n(x) = nP_{n-1}(x) - xnP_n(x)$$

Ora, derivando questa espressione per  $x$  e sommandola alla (14) moltiplicata per  $n$  otteniamo

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

dalla quale vediamo che i polinomi di Legendre  $P_n$  risolvono l'equazione differenziale di Legendre.  $\square$

*Osservazione 9.6.* Possiamo ora fare un'osservazione sulla parità dei polinomi di Legendre, infatti la funzione generatrice

$$f(x, t) = \frac{1}{(1+t^2-2tx)^{\frac{1}{2}}}$$

rispetta la condizione  $f(x, t) = f(-x, -t)$ . Quindi otteniamo che per i polinomi di Legendre la corrispondente relazione è

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(-x)(-t)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)(t)^n$$

quindi

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$$

e cioè i polinomi di Legendre di indice pari sono pari mentre quelli di indice dispari sono dispari.

*Osservazione 9.7.* Calcoliamo ora il valore assunto dai polinomi di Legendre nel punto  $x = 1$ . Sostituendo tale valore nella funzione generatrice definita nella definizione 9.7 otteniamo

$$\frac{1}{(1-2t+t^2)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(1)t^n$$

e, osservando che per  $|t| < 1$  si ha

$$\frac{1}{(1-t)} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

otteniamo che

$$P_n(1) = 1 \quad \forall n$$

e, conoscendo la parità dei polinomi è immediato ricavare che

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

Possiamo ora passare a mostrare la relazione di ortogonalità dei polinomi su  $L^2$ . L'intervallo da noi considerato sarà  $[-1, 1]$ , in quanto nelle applicazioni in genere si esprimono i polinomi di Legendre nella forma  $P(\cos(\vartheta))$ . Quindi considereremo  $L^2([-1, 1])$ .

**Teorema 9.6.** *I polinomi di Legendre formano un sistema ortogonale su  $L^2([-1, 1])$ .*

*Dimostrazione.* Calcoliamo il prodotto interno tra i polinomi di Legendre. Sia  $m \neq n$

$$(P_n | P_m) = \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx$$

Iniziamo considerando che, dall'equazione differenziale di Legendre

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)] &= (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) \\ &= -n(n+1)P_n(x) \end{aligned}$$

Consideriamo ora il seguente integrale

$$\begin{aligned} &\int_{-1}^1 \{P_n(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_m'(x)] - P_m(x) \frac{d}{dx}[(1-x^2)P_n'(x)]\} dx \\ &= [n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx \end{aligned}$$

Invece, integrando per parti lo stesso integrale otteniamo

$$\begin{aligned} &P_n(x)(1-x^2)P_m'(x) \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 P_n'(x)(1-x^2)P_m'(x) dx \\ &- P_m(x)(1-x^2)P_n'(x) \Big|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 P_m'(x)(1-x^2)P_n'(x) dx = 0 \end{aligned}$$

In quanto i due termini valutati agli estremi si annullano per il fatto che i polinomi di Legendre calcolati in  $x = 1$  sono identicamente uguali a 1 o  $-1$  e il termine  $(1 - x^2)$  si annulla.

Possiamo ora riassumere i risultati ottenuti e scrivere

$$[n(n+1) - m(m+1)] \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$$

e quindi, essendo  $n \neq m$  otteniamo la condizione di ortogonalità cercata

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \square$$

Per far diventare il sistema ortogonale dei polinomi di Legendre un s.o.n. dobbiamo trovare il coefficiente di normalizzazione di  $\|P_n\|$ .

**Proposizione 9.4.**

$$\|P_n\|^2 = \frac{2}{2n+1}$$

*Dimostrazione.* Eleviamo al quadrato la relazione definitoria tramite funzione generatrice

$$\frac{1}{1+t^2-2tx} = \left( \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(x) t^n \right)^2$$

Integrando termine a termine i membri dell'equazione per  $x$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2-2tx} dx &= \int_{-1}^1 \left( \sum_{n,m=0}^{+\infty} P_n(x) P_m(x) t^{n+m} \right) dx \\ &= \sum_{n,m=0}^{+\infty} \int_{-1}^1 P_n^2(x) \delta_{m,n} t^{n+m} dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \end{aligned}$$

inoltre

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{1+t^2-2tx} dx &= \frac{\log(1+t^2-2xt)}{-2t} \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{t} [\log(1+t) - \log(1-t)] \\ &= \frac{1}{t} \sum_{n=0}^{+\infty} \left[ \frac{(-1)^{n+1}}{n} t^n - \frac{(-1)^{2n+1}}{n} t^n \right] \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2n+1} t^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx \end{aligned}$$

da cui

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^1 P_n^2(x) dx = \frac{2}{2n+1} \quad \square$$

Dunque se definiamo

$$\tilde{P}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x)$$

otteniamo  $(\tilde{P}_n | \tilde{P}_m) = \delta_{mn}$ , cioè i  $\{\tilde{P}_n\}$  sono un s.o.n. in  $L^2([-1, 1])$ .

**Teorema 9.7.** *Per ogni  $f \in L^2([-1, 1])$  possiamo scrivere*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n P_n(x)$$

ove

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_n(x) f(x) dx$$

Quest'ultimo teorema afferma che i  $\{\tilde{P}_n\}$  sono un s.o.n.c. per  $L^2(-1, 1)$ .

Enunciamo un'ultimo teorema, che fornisce un metodo esplicito per calcolare i polinomi di Legendre.

**Teorema 9.8** (Formula di Rodriguez). *Vale la seguente formula:*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

S.O.N.C IN  $l^2$

Gli operatori lineari in spazi vettoriali finito dimensionali sono già stati trattati nei corsi di algebra lineare. Si ricorda che in tali spazi un operatore lineare può essere schematizzato tramite una matrice; la forma della matrice dipende dal tipo di base scelta nello spazio vettoriale, e quindi non è univocamente determinata. Una categoria particolarmente importante di matrici sono quelle diagonalizzabili; si ricorda che una matrice autoaggiunta, ossia una matrice che è uguale al suo trasposto coniugato, ammette sempre autovalori reali distinti.

In questo capitolo cercheremo di estendere il concetto di operatore lineare a spazi vettoriali infinito dimensionali.

### 10.1 OPERATORI LINEARI IN SPAZI INFINITO DIMENSIONALI

**Definizione 10.1** (Operatore lineare). Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Y$ ,  $X$  e  $Y$  spazi vettoriali su un campo  $\mathbb{K}$ , diciamo che  $A$  è lineare se

- (i)  $\mathcal{D}(A)$  è sottovarietà lineare di  $X$ .
- (ii)  $A(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{x}') \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathcal{D}(A)$ .
- (iii)  $A(\alpha \mathbf{x}) = \alpha A(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{K}$ .

Notiamo che l'unica ipotesi aggiuntiva nella definizione a quelle note è che  $\mathcal{D}(A)$  sia una sottovarietà lineare.

**Definizione 10.2** (Rango). Chiamiamo *rango* di un operatore lineare  $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Y$ , e lo indichiamo  $\text{rank}(A)$ :

$$\text{rank}(A) = \{\mathbf{y} \in Y : \exists \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) \text{ t.c. } A(\mathbf{x}) = \mathbf{y}\}$$

**Definizione 10.3** (Kernel). Chiamiamo *nucleo*, o *kernel*, di un operatore lineare  $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Y$ , e lo indichiamo  $\ker(A)$ :

$$\ker(A) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) : A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_Y\}$$

Lo spazio di tutti gli operatori lineari da  $X$  a  $Y$  viene indicato con  $\text{Hom}(X, Y)$ .

In questo spazio l'operatore

$$(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2)(\mathbf{x}) = \alpha_1 A_1(\mathbf{x}) + \alpha_2 A_2(\mathbf{x})$$

è ancora lineare  $\forall A_1, A_2 \in \text{Hom}(X, Y)$ ,  $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$  e  $\forall x \in \mathcal{D}(A_1) \cap \mathcal{D}(A_2)$ .

Dunque è lecito chiedersi se  $\text{Hom}(X, Y)$  è strutturabile come spazio vettoriale. La risposta in generale è negativa, infatti, se indichiamo con  $O$  la funzione identicamente nulla

$$O(x) = 0_Y \quad \forall x \in X$$

abbiamo che  $\text{rank}(O) = \{0_Y\}$  e  $\ker(O) = X$ , e  $\mathcal{D}(O) = X$ . Dunque se prendiamo l'operatore opposto di  $A$ , per definizione

$$A + (-A) = O$$

e quindi il dominio  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(-A)$  dovrà essere uguale a  $\mathcal{D}(O) = X$ , che in generale non è vero.

È allora utile definire lo spazio  $\mathcal{L}(X, Y)$  degli operatori lineari il cui dominio è tutto  $X$ , su cui si potrà definire uno spazio vettoriale.

**Definizione 10.4.** Siano  $A$  e  $B$  due operatori lineari, diciamo che  $A = B$  se  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$  e  $A(x) = B(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$ .

**Definizione 10.5.** Siano  $A$  e  $B$  due operatori lineari tali che  $\mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(A)$  e  $A(x) = B(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(B)$ , allora  $A$  è detta *estensione* di  $B$  in  $\mathcal{D}(A)$ .

Se  $A$  è un'estensione di  $B$  scriveremo, con un leggero abuso di linguaggio,  $B \subset A$ .

**Teorema 10.1** (Funzione inversa). *Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$  un operatore lineare tale che  $\ker(A) = \{0_X\}$ , allora esiste un operatore lineare  $A^{-1}$  tale che:*

- (i)  $A^{-1} : \text{rank}(A) \rightarrow X$
- (ii)  $A^{-1}(y) = x \quad \forall x \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \forall y \in \text{rank}(A) \text{ tali per cui } A(x) = y.$

Se chiamiamo  $\mathbb{1}_X : \mathcal{D}(\mathbb{1}_X) \subseteq X \rightarrow Y$  l'operatore identità, abbiamo che  $\mathcal{D}(\mathbb{1}_X) = X$ , e quindi non sempre vale che

$$A \circ A^{-1} = \mathbb{1}_X \quad \text{e} \quad A^{-1} \circ A = \mathbb{1}_Y$$

diremo invece che in generale l'identità è un'estensione di  $A \circ A^{-1}$  e di  $A^{-1} \circ A$ .

**Definizione 10.6** (Funzionale lineare). Chiamiamo *funzionali lineari* gli operatori appartenenti a  $\text{Hom}(X, \mathbb{K})$ .

Anche una classe di funzionali lineari può essere strutturata a spazio vettoriale tramite l'introduzione dello spazio  $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ , che viene solitamente detto *spazio duale* e indicato  $X^*$ .



## 10.2 OPERATORI LINEARI IN SPAZI NORMATI

Gli operatori  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ ,  $(X, \|\cdot\|_X)$  e  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  spazi normati, godono di alcune importanti proprietà. Quando non sarà indicato direttamente,  $X$  e  $Y$  saranno sempre spazi normati forniti della norma indicata sopra. Per non appesantire la scrittura, i pedici alle norme verranno omessi.

**Teorema 10.2.** *Un operatore lineare  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$  continuo è anche uniformemente continuo.*

**Definizione 10.7** (Operatore limitato). Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ , diremo che  $A$  è limitato se  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$  t.c.  $\|\mathbf{x}\| \leq k \Rightarrow \exists h$  t.c.  $\|A(\mathbf{x})\| \leq h$ .

**Teorema 10.3.** *Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq X \rightarrow Y$ , le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(i)  $A$  è continua.

(ii)  $A$  è limitata.

(iii)  $\exists m \geq 0$  t.c.  $\|A(\mathbf{x})\| < m\|\mathbf{x}\| \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$ .

*Dimostrazione.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Siccome  $A$  è continua, in particolare  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0$  t.c.  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$ , t.c.  $\|\mathbf{x}\| < \delta_\varepsilon$ , si ha  $\|A(\mathbf{x})\| < \varepsilon$ .

Scegliamo  $\mathbf{x}$  tale che  $\|\mathbf{x}\| < k$ , allora

$$\left\| \frac{\delta_\varepsilon \mathbf{x}}{k} \right\| = \frac{\delta_\varepsilon}{k} \|\mathbf{x}\| < \delta_\varepsilon$$

per la continuità questo implica che

$$\left\| A\left(\frac{\delta_\varepsilon}{k} \mathbf{x}\right) \right\| < \varepsilon$$

cioè

$$\frac{\delta_\varepsilon}{k} \|A(\mathbf{x})\| < \varepsilon$$

da cui

$$\|A(\mathbf{x})\| < \frac{k}{\delta_\varepsilon} \varepsilon \equiv h$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Sia

$$S := \{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) : \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

per ipotesi  $\forall \mathbf{x} \in S$   $\|A(\mathbf{x})\| \leq h$ .

Notiamo che  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in S \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) - \{0\}$ , da cui

$$\left\| A\left(\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}\right) \right\| \leq h$$

$$\|A(\mathbf{x})\| \leq h\|\mathbf{x}\|$$

Se  $\mathbf{x} = 0$  allora vale l'uguaglianza.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) Se fosse  $m = 0$  allora avremmo  $A(x) = 0 \forall x \in \mathcal{D}(A)$ , cioè  $A$  è la funzione identicamente nulla, che quindi è continua. Sia allora  $m \neq 0$ , allora preso  $\varepsilon > 0$  e  $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{m}$ , se  $\|x_1 - x_2\| < \delta(\varepsilon)$  allora

$$\|A(x_1) - A(x_2)\| = \|A(x_1 - x_2)\| \leq m\|x_1 - x_2\| < \varepsilon$$

cioè  $A$  è continua.

□

**Definizione 10.8** (Norma operatoriale). Sia  $A$  un operatore limitato, sia

$$\eta = \{m \geq 0 : \|A(x)\| \leq m\|x\| \forall x \in \mathcal{D}(A)\}$$

chiamiamo norma operatoriale di  $A$

$$\|A\| := \inf \eta$$

*Osservazione 10.1.* Dalla definizione è immediato che

$$\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|$$

**Teorema 10.4.** Sia  $A \in \text{Hom}(X, Y)$  limitato, allora:

(i)

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ x \neq 0}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$$

(ii)

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ \|x\|=1}} \|A(x)\|$$

(iii)

$$\|A\| = \sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ \|x\| \leq 1}} \|A(x)\|$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo per esempio la (i).

Per ogni  $x \in \mathcal{D}(A)$  vale, per la definizione di norma operatoriale

$$\|A(x)\| \leq \|A\| \|x\|$$

se  $x \neq 0$

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leq \|A\|$$

passando all'estremo superiore

$$\sup_{\substack{x \in \mathcal{D}(A) \\ x \neq 0}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leq \|A\|$$

Dimostriamo ora la disuguaglianza opposta.  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}(A) - \{0\}$

$$\frac{\|A(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|} \leq \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

da cui

$$\|A(\mathbf{y})\| \leq \left( \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \right) \|\mathbf{y}\|$$

dunque abbiamo che

$$\sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \in \eta$$

ove  $\eta$  è come nella definizione 10.8. Essendo  $\|A\| = \inf \eta$  sarà

$$\|A\| \leq \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) \\ \mathbf{x} \neq 0}} \frac{\|A(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

dalle due disuguaglianze ricavate otteniamo la tesi.  $\square$

Se  $X$  e  $Y$  sono spazi di Hilbert allora abbiamo un'ulteriore utile formula per ricavare il valore della norma operatoriale di un operatore lineare.

**Teorema 10.5.** *Sia  $A \in \text{Hom}(\mathcal{H}, \mathcal{H})$  lineare, allora:*

$$\|A\| = \sup_{\substack{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(A) \\ \mathbf{y}, \mathbf{x} \neq 0}} \frac{|(\mathbf{x}|A(\mathbf{y}))|}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} = \sup_{\substack{\mathbf{y} \in \mathcal{D}(A) \\ \|\mathbf{y}\|, \|\mathbf{x}\|=1}} |(\mathbf{x}|A(\mathbf{y}))|$$

**Teorema 10.6.** *Sia  $A \in \text{Hom}(X, Y)$ , le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

- (i)  $A^{-1}$  esiste limitato.
- (ii)  $\exists \mu > 0$  tale che,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$ ,  $\|A(\mathbf{x})\| \geq \mu \|\mathbf{x}\|$

*Dimostrazione.*

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Se  $A^{-1}$  esiste limitato  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{D}(A^{-1})$ ,  $\mathbf{y} \neq 0$

$$\|A^{-1}(\mathbf{y})\| \leq m \|\mathbf{y}\|$$

ma se  $\mathbf{y} \in \mathcal{D}(A^{-1})$  allora  $\exists \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$  tale che  $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$ , e quindi

$$\|A^{-1}(A(\mathbf{x}))\| \leq m \|A(\mathbf{x})\| \quad \Rightarrow \quad \|A(\mathbf{x})\| \geq \frac{1}{m} \|\mathbf{x}\|$$

che è la tesi.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Per la disuguaglianza in ipotesi se  $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  allora  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , e dunque  $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$ , quindi esiste  $A^{-1}$ , dimostriamo ora che è limitato.

Sia  $\mathbf{y} \in \text{rank}(A)$  t.c.  $A^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$ , allora

$$\begin{aligned} \|A(\mathbf{x})\| &\geq \mu \|\mathbf{x}\| \\ \Rightarrow \|A(A^{-1}(\mathbf{y}))\| &\geq \mu \|A^{-1}(\mathbf{y})\| \\ \Rightarrow \|A^{-1}(\mathbf{y})\| &\leq \frac{1}{\mu} \|\mathbf{y}\| = m \|\mathbf{y}\| \end{aligned}$$

□

*Osservazione 10.2.* Notiamo che se vale l'ipotesi (ii) del teorema precedente, allora  $A^{-1}$  sarà anche continua.

*Esempio 10.1.* Prendiamo  $X = Y = \mathbb{C}^n$  e  $A \in \text{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$  che agisce sulla base canonica nel modo seguente

$$A(\mathbf{e}_j) = j\mathbf{e}_j$$

Siccome  $A$  mappa in  $\mathbb{C}^n$  possiamo scrivere ogni vettore su cui agisce  $A$  come una combinazione lineare dei vettori della base canonica:

$$A(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^n A_{ij} \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n j\delta_{ij} \mathbf{e}_i$$

cioè

$$A_{ij} = j\delta_{ij} \quad , \quad A = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & n \end{bmatrix}$$

Dunque  $A$  è sicuramente limitato, e dunque continuo.

In generale se  $A : \mathcal{D}(A) \subset X \rightarrow Y$  e  $\dim(\mathcal{D}(A)) < +\infty$ , allora  $A$  sarà limitato.

*Esempio 10.2.* Consideriamo  $X = Y = \mathcal{H}$  e sia  $\{\mathbf{u}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  un s.o.n.c. ; sia  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  definito come segue

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} (\mathbf{u}_n | \mathbf{x}) \mathbf{u}_{n+1}$$

La prima cosa da chiedersi è se l'operatore è ben definito su tutto  $\mathcal{H}$ , cioè se la serie è convergente. Per il teorema di Fisher-Riesz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n+1} (\mathbf{u}_n | \mathbf{x}) \right|^2 \leq \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} |(\mathbf{u}_n | \mathbf{x})|^2 \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{x}\|^2 < +\infty$$

*Esempio 10.3 (Operatore derivazione).* Consideriamo l'operatore derivazione  $D_x : \mathcal{C}^1([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ , si può dimostrare che  $\mathcal{C}^1([0, 1])$  è sottospazio di Hilbert di  $\mathcal{C}([0, 1])$ , allora  $D_x$  è lineare.

**Esempio 10.4** (Operatore moltiplicazione). L'operatore moltiplicazione  $A : L^2([a, b]) \rightarrow L^2([a, b])$ ,  $f(x) \in L^2([a, b]) \mapsto xf(x) \in L^2([a, b]) \forall x \in [a, b]$  è lineare e ben definito. Notiamo che se consideriamo lo stesso operatore  $A : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ , questo non sarebbe ben definito per ogni elemento di  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Esempio 10.5.** Consideriamo lo spazio di Hilbert  $\mathcal{H} = l^2(\mathbb{C})$  e sia  $A : l^2(\mathbb{C}) \rightarrow l^2(\mathbb{C})$ , che mappa la generica successione  $\{\alpha_i\}$  come

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots) \mapsto (\alpha_3, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_6, \alpha_5, \alpha_4, \dots)$$

Allora è possibile rappresentare  $A$  come una matrice a blocchi infinita:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & & & & \dots \\ 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & 1 & & & \\ & 0 & & 0 & 1 & 0 & & & \dots \\ & & & 1 & 0 & 0 & & & \\ \hline \vdots & & & \vdots & & & \ddots & & \end{array} \right]$$

**Definizione 10.9** (Grafico lineare di un operatore). Sia  $A \in \text{Hom}(X, Y)$ , chiamiamo grafico lineare di  $A$

$$\mathcal{G}(A) := \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in X \times Y : \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A) \text{ e } \mathbf{y} = A(\mathbf{x})\}$$

Il grafico di un operatore gode delle seguenti proprietà

- (i)  $\mathcal{G}(A) \subset X \times Y$ .
- (ii)  $\mathcal{G}(A)$  è una varietà lineare.
- (iii) Se  $(\mathbf{0}_X, \mathbf{y}) \in \mathcal{G}(A)$  allora  $\mathbf{y} = \mathbf{0}_Y$ .

Si può dimostrare che l'ultima proprietà enunciata, che deriva direttamente dalla linearità di  $A$ , è anche condizione sufficiente affinché  $\mathcal{G}(A)$  sia un grafico lineare.

**Osservazione 10.3.** Nel caso particolare in cui  $X$  e  $Y$  sono spazi di Hilbert, chiamiamoli  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , è possibile definire un prodotto interno in  $\mathcal{H}_1 \times \mathcal{H}_2$  nel modo seguente:

$$((\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1) | (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)) = (\mathbf{x}_1 | \mathbf{x}_2)_1 + (\mathbf{y}_1 | \mathbf{y}_2)_2$$

Quindi per una mappa  $A \in \text{Hom}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ ,  $\mathcal{G}(A)$  è uno sottospazio di Hilbert.

## 10.3 FUNZIONALI LINEARI SU SPAZI DI HILBERT

**Definizione 10.10** (Funzionale limitato). Sia  $X$  uno spazio normato e  $L$  un funzionale lineare da  $X$  al campo  $\mathbb{K}$ . Il funzionale  $L$  si dice *limitato* se  $\exists m > 0$  t.c.

$$\|L(x)\| \leq m\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{D}(L)$$

L'insieme dei funzionali lineari *limitati* su  $X$  si indica con  $X^\dagger$ , sotto-spazio del duale di  $X$ ,  $X^*$ .

Anche lo spazio  $X^\dagger$  può essere strutturato a spazio lineare attraverso l'introduzione di una somma tra funzionali limitati

$$(L_1 + L_2)(x) = L_1(x) + L_2(x)$$

e di un prodotto esterno  $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

$$(\alpha L)(x) = \alpha L(x)$$

Inoltre lo spazio  $X^\dagger$  può normato grazie all'introduzione di una norma, e può essere reso uno spazio di Banach.

Si può inoltre definire lo spazio  $X^{\dagger\dagger}$ , definito come l'insieme dei funzionali lineari limitati definiti su  $X^\dagger$ .

**Teorema 10.7.** Dato uno spazio vettoriale  $X$  e definiti gli spazi  $X^\dagger$  e  $X^{\dagger\dagger}$ , l'applicazione  $\hat{\cdot}: X \rightarrow X^{\dagger\dagger}$  che associa ad ogni  $x \in X$  l'elemento  $\hat{x}$  definito come

$$\hat{x}(L) = \overline{L(x)}$$

è un isomorfismo tra  $\text{rank}(\hat{\cdot})$  e  $X$ .

In particolare se  $\text{rank}(\hat{\cdot}) = X^{\dagger\dagger}$  otteniamo che  $X \equiv X^{\dagger\dagger}$  e quindi lo spazio vettoriale  $X$  è riflessivo.

Abbiamo già introdotto in precedenza il concetto di convergenza, o convergenza forte, di una successione, e quello di convergenza debole, legata ai funzionali lineari limitati. Notiamo che mentre il concetto di convergenza forte si richiamava alla topologia delle sfere aperte, quello di convergenza debole viene definito grazie alla topologia debole, cioè gli aperti del tipo

$$U_n(\varepsilon; L_1, \dots, L_n) = \{x \in X : |L_k(x)| < \varepsilon \forall k = 1, \dots, n\}$$

Dove gli  $L_k$  sono funzionali lineari limitati su  $X$ . In questo modo  $\{U_n(\varepsilon; L_1, \dots, L_n)\}$  definiscono una base di intorno del punto 0.

**Definizione 10.11** (Convergenza debole). Diremo che la successione  $\{x_n\}$  di elementi in  $X$  converge *debolmente* a  $\bar{x}$  in  $X$  se  $\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon > 0$  tale che  $\forall n \geq N_\varepsilon$

$$|L(x_n) - L(\bar{x})| < \varepsilon \quad \forall L \in X^\dagger$$

Possiamo ora introdurre lo spazio dei funzionali lineari limitati su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , indicato con  $\mathcal{H}^\dagger$ .

**Teorema 10.8** (di Riesz). *Sia  $\mathcal{H}$  uno spazio di Hilbert e  $\mathcal{H}^\dagger$  il suo duale. Sia  $L$  un funzionale lineare su  $\mathcal{H}$ , allora*

(i) *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

(a)  $L \in \mathcal{H}^\dagger$  (cioè  $L$  è limitato);

(b)  $\exists \mathbf{y}_L \in \mathcal{H}$  tale che  $L(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}_L | \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ . Cioè  $L$  è un funzionale del tipo  $L = (\mathbf{y}_L | \cdot)$

(ii) *Il vettore  $\mathbf{y}_L$  se esiste è unico e  $\|L\|_{\mathcal{H}^\dagger} \equiv \|\mathbf{y}_L\|_{\mathcal{H}}$*

*Dimostrazione.* Iniziamo dimostrando la (i)

(a) $\Rightarrow$ (b)  $L \in \mathcal{H}^\dagger$  è un operatore limitato, consideriamo il suo nucleo  $\ker(L) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{H} : L(\mathbf{x}) = 0\}$  è un sottospazio lineare di  $\mathcal{H}$ , cioè è chiuso.

Infatti sia  $\{\mathbf{x}_n\}$  è un successione in  $\ker(L)$  convergente ad un elemento  $\bar{\mathbf{x}} \in \mathcal{H}$ . Dobbiamo mostrare che  $\bar{\mathbf{x}} \in \ker(L)$  infatti

$$L(\mathbf{x}_n) = 0 \quad \forall n \text{ e } \mathbf{x}_n \rightarrow \bar{\mathbf{x}} \text{ per } n \rightarrow \infty$$

quindi, per la continuità di  $L$ , anche  $L(\bar{\mathbf{x}}) = 0$

Posso quindi definire  $\ker(L)^\perp$  e decomporre lo spazio di Hilbert in  $\mathcal{H} = \ker(L) \oplus \ker(L)^\perp$ .

Sono ora possibili due casi, se  $\ker(L) = \mathcal{H}$  allora  $L(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ , quindi  $\mathbf{y}_L = 0$  e la tesi è banale.

Se  $\ker(L) \neq \mathcal{H}$ , quindi  $\ker(L)^\perp \neq \{0\}$  possiamo prendere un elemento  $\mathbf{u} \in \ker(L)^\perp$ ,  $\mathbf{u} \neq 0$ , dunque,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$

$$\mathbf{x} = \frac{L(\mathbf{x})}{L(\mathbf{u})}\mathbf{u} + \left(\mathbf{x} - \frac{L(\mathbf{x})}{L(\mathbf{u})}\mathbf{u}\right)$$

abbiamo quindi scritto  $\mathbf{x}$  come somma di due termini, uno in  $\ker(L)^\perp$  e l'altro in  $\ker(L)$ , infatti

$$L\left(\mathbf{x} - \frac{L(\mathbf{x})}{L(\mathbf{u})}\mathbf{u}\right) = L(\mathbf{x}) - L(\mathbf{x}) = 0$$

Possiamo calcolare ora il prodotto interno tra  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{u}$  ottenendo

$$(\mathbf{u} | \mathbf{x}) = \frac{L(\mathbf{x})}{L(\mathbf{u})}(\mathbf{u} | \mathbf{u}) = \frac{L(\mathbf{x})}{L(\mathbf{u})}\|\mathbf{u}\|^2$$

quindi

$$L(\mathbf{x}) = \frac{L(\mathbf{u})}{\|\mathbf{u}\|^2}(\mathbf{u} | \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$$

e, se definiamo  $\mathbf{y}_L = \frac{\overline{L(\mathbf{u})}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u}$  abbiamo che  $L(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}_L | \mathbf{x})$ , cioè la tesi.

(b) $\Rightarrow$  (a) Supponiamo che  $\exists \mathbf{y}_L \in \mathcal{H}$  tale che

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}_L | \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$$

allora abbiamo che

$$|L(\mathbf{x})| = |(\mathbf{y}_L | \mathbf{x})| \leq \|\mathbf{y}_L\| \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$$

quindi  $L$  è limitato.

Dobbiamo ora dimostrare il punto (ii), supponiamo per assurdo che esistano  $\mathbf{y}_L$  e  $\mathbf{y}'_L$  tali che

$$L(\mathbf{x}) = (\mathbf{y}_L | \mathbf{x}) = (\mathbf{y}'_L | \mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$$

allora avremo che  $(\mathbf{y}_L - \mathbf{y}'_L | \mathbf{x}) = 0$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$  e quindi  $\mathbf{y}_L = \mathbf{y}'_L$ .

Consideriamo ora

$$|L(\mathbf{x})| = |(\mathbf{y}_L | \mathbf{x})| \leq \|\mathbf{y}_L\| \|\mathbf{x}\|$$

cioè, passando all'estremo superiore

$$\|L\| \leq \|\mathbf{y}_L\|$$

Inoltre

$$\|\mathbf{y}_L\|^2 = \|(\mathbf{y}_L | \mathbf{y}_L)\| = |L(\mathbf{y}_L)| \leq \|L\| \|\mathbf{y}_L\|$$

cioè, se  $\mathbf{y}_L \neq 0$  otteniamo che

$$\|\mathbf{y}_L\| \leq \|L\|$$

cioè la tesi.  $\square$

*Osservazione 10.4.* Grazie ai risultati del teorema precedente possiamo definire in  $\mathcal{H}^\dagger$  un prodotto interno tale che, se  $L_1$  e  $L_2$  sono elementi di  $\mathcal{H}^\dagger$  allora

$$(L_1 | L_2) = (\mathbf{y}_{L_1} | \mathbf{y}_{L_2})$$

In questo modo anche  $\mathcal{H}^\dagger$  può essere strutturato a spazio con prodotto interno, e si può dimostrare che anch'esso è uno spazio di Hilbert.

Quindi, possiamo considerare l'applicazione che ad ogni  $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$  associa un elemento  $L \in \mathcal{H}^\dagger$  definita come

$$L = (\mathbf{y} | \cdot)$$

e questa applicazione rappresenta un isomorfismo tra  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}^\dagger$

*Osservazione 10.5.* Anche nello spazio  $\mathcal{H}^{\dagger\dagger}$  posso definire un'applicazione che ad ogni  $G$  che ad ogni  $L \in \mathcal{H}^\dagger$  associa l'elemento

$$G(L) = (L_G | L) = (\mathbf{y}_{L_G} | \mathbf{y}_L) = \overline{L(\mathbf{y}_{L_G})}$$

e quindi definire un isomorfismo anche tra  $\mathcal{H}$  e  $\mathcal{H}^{\dagger\dagger}$ .

Inoltre si può dimostrare che  $\mathcal{H} \equiv \mathcal{H}^{\dagger\dagger}$  e quindi che ogni spazio di Hilbert è riflessivo.



## 10.4 OPERATORE AGGIUNTO

*Esempio 10.6* (Operatore aggiunto in  $\mathbb{C}^n$ ). Sia  $A : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ , allora possiamo vedere  $A$  come ad una matrice appartenente al gruppo  $GL(n, \mathbb{C})$  delle matrici  $n \times n$  sul campo complesso; possiamo dunque scrivere

$$(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^n A_{ij}x_j$$

Se calcoliamo il prodotto interno

$$\begin{aligned} (\mathbf{y}, A\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^n \bar{y}_i (A\mathbf{x})_i = \sum_{i,j=1}^n \bar{y}_i A_{ij} x_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \overline{\bar{y}_i A_{ij}} x_j = \sum_{i,j=1}^n \overline{A_{ji}} \bar{y}_i x_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \overline{A_{ji}^\dagger} \bar{y}_i x_j = \sum_{j=1}^n (\overline{A^\dagger \mathbf{y}})_j x_j = (A^\dagger \mathbf{y}, \mathbf{x}) \end{aligned}$$

cioè

$$(\mathbf{y}, A\mathbf{x}) = (A^\dagger \mathbf{y}, \mathbf{x})$$

e analogamente

$$(A\mathbf{y}, \mathbf{x}) = (\mathbf{y}, A^\dagger \mathbf{x})$$

Vogliamo ora estendere la definizione di operatore aggiunto al caso infinito dimensionale, passando, come nell'esempio, per l'invarianza del prodotto interno. Da questo fatto è immediato che sarà possibile definire l'operatore aggiunto solo in spazi hilbertiani o prehilbertiani.

**Definizione 10.12.** Sia  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  lineare, diciamo che  $A$  ammette operatore aggiunto se  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H} \exists \mathbf{y}' \in \mathcal{H}$  tale che

$$(A\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}')$$

In tal caso chiamiamo operatore aggiunto di  $A$ , e lo indicheremo con  $A^\dagger$ , l'operatore che  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}$

$$\mathbf{y}' = A^\dagger(\mathbf{y})$$

Notiamo che in questo caso, poiché il dominio di  $A$  è tutto  $\mathcal{H}$ , la definizione di  $A^\dagger$  è ben posta; infatti se avessimo  $\mathbf{y}', \mathbf{y}'' \in \mathcal{H}$  soddisfacenti la definizione, potremmo dire che

$$(A\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}') = (\mathbf{x}|\mathbf{y}'')$$

e dunque

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}' - \mathbf{y}'') = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$$

cioè

$$\mathbf{y}' - \mathbf{y}'' = 0$$

Inoltre possiamo dire che

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{\mathbf{y} \in \mathcal{H} : \exists \mathbf{y}' \in \mathcal{H} \text{ con } (A\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}') \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}\}$$

**Proposizione 10.1.** *Sia  $A$  un operatore lineare e sia  $A^\dagger$  il suo aggiunto, allora*

$$\ker(A^\dagger) = \text{rank}(A)^\perp$$

*Dimostrazione.* Infatti se  $\mathbf{y} \in \ker(A^\dagger)$  allora  $A^\dagger(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$ , cioè,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H} \ (\mathbf{x}|A^\dagger(\mathbf{y})) = 0$ ; per la definizione di operatore aggiunto questo equivale a dire che  $(A(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = 0$ , cioè  $\mathbf{y}$  è ortogonale ad ogni vettore della  $A(\mathcal{H}) \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ ; che è la tesi.  $\square$

Come si è visto la definizione di operatore aggiunto è stata data per operatori lineari definiti su tutto  $\mathcal{H}$ , ora ci proponiamo di ampliare la definizione di operatore aggiunto quelli operatori che sono definiti su  $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H}$ .

Al fine di trovare un criterio operativo per verificare quali operatori ammettono aggiunto, introduciamo l'operatore  $V : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ,  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \mapsto (-\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1)$ . Notiamo che  $V$  così definito quadra a meno l'identità, infatti

$$V(V(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)) = V(-\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) = (-\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2)$$

cioè

$$V \circ V = -\mathbb{1}$$

**Teorema 10.9.** *Se  $A$  ammette aggiunto, allora*

$$\mathcal{G}(A^\dagger) = [V\mathcal{G}(A)]^\perp$$

*Dimostrazione.* Se  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \in \mathcal{G}(A^\dagger)$  allora per definizione  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$

$$(\mathbf{x}|A^\dagger(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}')$$

Questo equivale a dire, per la definizione di prodotto interno data nell'osservazione 10.3, che

$$((-A(\mathbf{x}), \mathbf{x})|(\mathbf{y}, \mathbf{y}')) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$$

Notiamo che essendo  $(\mathbf{x}, A(\mathbf{x})) \in \mathcal{G}(A)$  avremo  $(-A(\mathbf{x}), \mathbf{x}) \in V\mathcal{G}(A)$ , cioè  $(\mathbf{y}, \mathbf{y}') \in [V\mathcal{G}(A)]^\perp$   $\square$

**Definizione 10.13** (Operatore aggiunto). Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un'operatore lineare, diciamo che  $A$  ammette  $A^\dagger$  come operatore aggiunto se  $[V\mathcal{G}(A)]^\perp$  è un grafico lineare. In questo caso vale che

$$[V\mathcal{G}(A)]^\perp = \mathcal{G}(A^\dagger)$$

*Osservazione 10.6.* Notiamo che quando esiste  $\mathcal{G}(A^\dagger)$  è sempre un sottospazio di Hilbert di  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ .

**Teorema 10.10.** *Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  una mappa lineare, allora  $A^\dagger$  esiste se e solo se  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ .*

<sup>1</sup> Si ricorda che questa affermazione equivale a dire che  $\mathcal{D}(A)$  è denso in  $\mathcal{H}$ .

*Dimostrazione.* Mostriamo la validità del teorema esplicitando tutte le doppie implicazioni.

Per definizione  $A^\dagger$  esiste

$$\iff [\mathcal{V}\mathcal{G}(A)]^\perp \text{ è un grafico lineare}$$

$$\iff (0, \mathbf{y}) \in [\mathcal{V}\mathcal{G}(A)]^\perp \text{ implica } \mathbf{y} = 0$$

$$\iff \text{usando la definizione del prodotto interno in } \mathcal{H} \times \mathcal{H}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$$

$$((-A(\mathbf{x}), \mathbf{x}) | (0, \mathbf{y})) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = 0$$

$$\iff \text{esplicitando il prodotto interno, } \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$$

$$(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = 0$$

$$\iff \mathbf{y} \in \mathcal{D}(A)^\perp \text{ implica che } \mathbf{y} = 0$$

$$\iff \mathcal{D}(A)^\perp = \{0\}$$

$$\iff \overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{D}(A)^{\perp\perp} = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$$

□

**Definizione 10.14** (Operatore chiuso). Sia  $A \in \text{Hom}(X, Y)$ , diciamo che  $A$  è chiuso se  $\mathcal{G}(A)$  è un sottospazio chiuso di  $X \times Y$ .

**Definizione 10.15** (Chiusura di un operatore). Sia  $A \in \text{Hom}(X, Y)$ , se  $\mathcal{G}(A)$  ammette estensione chiusa, cioè se  $\overline{\mathcal{G}(A)}$  è ancora un grafico lineare, allora diciamo che  $\overline{\mathcal{G}(A)}$  è il grafico dell'operatore  $\bar{A}$  detto chiusura di  $A$ .

Se un'operatore non è chiuso, la chiusura di un operatore è dunque un'estensione dell'operatore stesso.

*Osservazione 10.7.* Un qualsiasi operatore aggiunto è sempre chiuso.

**Teorema 10.11.** Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore lineare che ammette aggiunto, allora  $A^{\dagger\dagger}$  esiste se e solo se  $A$  è chiudibile; in questo caso si ha che  $A^{\dagger\dagger} = \bar{A}$ .

*Osservazione 10.8.* Se  $A$  è chiuso otteniamo che  $A^{\dagger\dagger} = A$ , infatti  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$

$$(\mathbf{x} | A^{\dagger\dagger}(\mathbf{y})) = (A^\dagger(\mathbf{x}) | \mathbf{y}) = (\mathbf{x} | A(\mathbf{y}))$$

senza problemi sul dominio.

**Teorema 10.12.** Se  $A$  è limitato e  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ , allora  $A^\dagger$  è limitato e

$$\|A\| = \|A^\dagger\|$$

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo l'equivalenza fra le norme operatoriali, per operatori in spazi di Hilbert possiamo dire che

$$\|A\| = \sup_{\|y\|, \|x\|=1} |(x|A(y))| = \sup_{\|y\|, \|x\|=1} |(A^\dagger(x)|y)| = \|A^\dagger\|$$

□

*Esempio 10.7.* Sia  $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  un s.o.n.c. di  $\mathcal{H}$  e sia  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  l'operatore lineare così definito

$$A(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} (u_n|x) u_{n+1}$$

Poichè  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ , esiste  $A^\dagger$  e poichè, come già visto nell'esempio 10.2,  $A$  è limitato, anche  $A^\dagger$  sarà limitato, e dunque continuo.

Per capire come  $A^\dagger$  agisce sullo spazio  $\mathcal{H}$  è sufficiente capire come agisce su di un generico vettore  $y \in \mathcal{H}$  calcolandone i coefficienti di Fourier, cioè

$$(u_k|A^\dagger(y)) = (A(u_k)|y) = \left( \frac{1}{k+1} u_{k+1} | y \right)$$

quindi

$$A^\dagger(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (u_n|A^\dagger(y)) u_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} (u_{n+1}|y) u_n$$

**Teorema 10.13.** Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore lineare, se  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$  e  $\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{H}$ , allora  $A$  è limitato.

**Definizione 10.16** (Operatore simmetrico). Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore lineare tale che  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ , diciamo che  $A$  è simmetrico se  $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\dagger)$  e

$$A^\dagger(x) = A(x) \quad \forall x \in \mathcal{D}(A)$$

La definizione equivale a dire che l'operatore aggiunto è un'estensione dell'operatore di partenza.

Come ci si poteva aspettare la definizione mirava a dire che  $\forall x, y \in \mathcal{D}(A)$

$$(x|A(y)) = (A(x)|y)$$

*Osservazione 10.9.* Un'operatore  $A$  simmetrico è sempre chiudibile, infatti poichè ammette aggiunto  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ , per cui, essendo  $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^\dagger)$ , anche  $\overline{\mathcal{D}(A^\dagger)} = \mathcal{H}$ , per cui esiste  $A^{\dagger\dagger}$ , cioè  $A$  è chiudibile.

**Definizione 10.17** (Operatore autoaggiunto). Sia  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore lineare tale per cui  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ , diciamo che  $A$  è autoaggiunto se  $A = A^\dagger$ .

Per le osservazioni precedenti è immediato notare che l'operatore autoaggiunto è un'estensione al caso infinito dimensionale delle matrici hermitiane.

*Osservazione 10.10.* Notiamo che se  $A$  è simmetrico e  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ , allora  $A$  è autoaggiunto.

L'operatore aggiunto gode delle seguenti proprietà:

- (i)  $A^\dagger + B^\dagger \subset (A + B)^\dagger$ .
- (ii)  $(\alpha A)^\dagger = \bar{\alpha} A^\dagger \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}$ .
- (iii)  $B^\dagger \circ A^\dagger \subset (A \circ B)^\dagger$ .
- (iv)  $(A^{-1})^\dagger = (A^\dagger)^{-1}$ .
- (v) se  $A$  è autoaggiunto allora anche  $A^\dagger \circ A$  e  $A + A^\dagger$  sono autoaggiunti.
- (vi) se  $A$  e  $B$  sono autoaggiunti allora  $AB$  è autoaggiunto se e solo se  $A$  e  $B$  commutano.

## 10.5 PROIETTORI

*Esempio 10.8* (Proiettori in  $\mathbb{R}^2$ ). Richiamiamo il concetto di proiettore in  $\mathbb{R}^2$ ; cioè che si dirà è immediatamente generalizzabile per  $\mathbb{R}^n$ .  $\mathbb{R}^2$  è uno spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare standard

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

In questo spazio un proiettore è un operatore  $P_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $(x_1, x_2)^t \mapsto (x_1, 0)^t = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) \mathbf{e}_1$ .

Un proiettore può essere rappresentato tramite una matrice nilpotente

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

oltre a essere nilpotente questa matrice sarà anche autoaggiunta e idempotente, cioè vale che

$$P_1^2 = P_1 P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = P_1$$

Notiamo che se  $\mathbf{x} = (x_1, 0)^t$  allora  $P_1(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ .

Inoltre se chiamiamo  $\mathbb{R}_x = \text{span}(\mathbf{e}_1)$  e  $\mathbb{R}_y = \text{span}(\mathbf{e}_2)$ , possiamo scrivere  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \oplus \mathbb{R}_y$  e  $\text{rank}(P_1) = \mathbb{R}_x$  e  $\ker(P_1) = \mathbb{R}_y$ .

Cerchiamo di estendere quanto visto sopra al caso infinito dimensionale, e cerchiamo di verificare se valgono le medesime proprietà prima viste. lo spazio naturale dove svolgere questa generalizzazione è lo spazio di Hilbert, in quanto è necessario uno spazio vettoriale dotato di prodotto interno in cui è possibile scrivere  $\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$ .

**Definizione 10.18** (Proiettore su  $\mathcal{M}$ ). Sia  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$  sottospazio di Hilbert e  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}'' \in \mathcal{H}$ , con  $\mathbf{x}' \in \mathcal{M}$  e  $\mathbf{x}'' \in \mathcal{M}^\perp$ , chiamiamo proiettore su  $\mathcal{M}$  l'operatore  $P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}'$ .

*Osservazione 10.11.* È facile dimostrare che  $P_{\mathcal{M}}$  così definito è un'operatore lineare e  $\mathcal{D}(P_{\mathcal{M}}) = \mathcal{H}$ .

Dalla definizione segue che se  $\mathcal{M} = \mathcal{H}$  allora  $P_{\mathcal{M}} = \mathbb{1}$  e se  $\mathcal{M} = \{0\}$  allora  $P_{\mathcal{M}} = 0$ .

**Teorema 10.14.** Sia  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$  e sia  $P_{\mathcal{M}}$  il relativo proiettore, allora:

- (i)  $P_{\mathcal{M}}$  è un operatore limitato (e dunque continuo).
- (ii) Se  $\mathcal{M} \neq \{0\}$  allora  $\|P_{\mathcal{M}}\| = 1$ , se  $\mathcal{M} = \{0\}$ ,  $\|P_{\mathcal{M}}\| = 0$ .
- (iii)  $\text{rank}(P_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}$ .
- (iv)  $\ker(P_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^\perp$ .
- (v)  $\mathbb{1} - P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}^\perp}$ .

*Dimostrazione.* (i)  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$

$$\|P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}'\| \leq \sqrt{\|\mathbf{x}'\|^2 + \|\mathbf{x}''\|^2} = \sqrt{\|\mathbf{x}' + \mathbf{x}''\|^2} = \|\mathbf{x}\|$$

Per cui  $P_{\mathcal{M}}$  è limitato.

inoltre possiamo scrivere la seguente disuguaglianza

$$\frac{\|P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq 1$$

- (ii) Escludendo il caso banale  $\mathcal{M} = \{0\}$  possiamo dire che se  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$  allora

$$P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \implies \frac{\|P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1$$

Per cui

$$\|P_{\mathcal{M}}\| \geq \frac{\|P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1$$

Grazie alla disuguaglianza ottenuta in (i) abbiamo la tesi.

- (iii) Se un elemento  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$  può essere scritto come  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$  con  $\mathbf{x}' \in \mathcal{M}$  e  $\mathbf{x}'' \in \mathcal{M}^\perp$ , allora il rango di  $P_{\mathcal{M}}$  è

$$\text{rank}(P_{\mathcal{M}}) = \{\mathbf{x}' \in \mathcal{M} : \mathbf{x}' = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})\} \subseteq \mathcal{M}$$

Dobbiamo mostrare ora che vale l'inclusione opposta, sia  $\mathbf{x}' \in \mathcal{M}$ , allora ovviamente sarà  $\mathbf{x}' \in \mathcal{H}$  e potremo scrivere  $\mathbf{x}' = \mathbf{x}' + 0$ . Per definizione di proiettore avremo dunque  $\mathbf{x}' \equiv P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}')$ , cioè un qualsiasi elemento di  $\mathcal{M}$  può essere scritto come l'immagine, attraverso il proiettore  $P$  di sé stesso. Quindi  $\mathbf{x}' \in \text{rank}(P_{\mathcal{M}})$  e  $\mathcal{M} \subseteq \text{rank}(P_{\mathcal{M}})$ , cioè la tesi.

Notiamo in altre che grazie a questa uguaglianza possiamo scrivere

$$P_{\mathcal{M}} = P_{\text{rank}(P_{\mathcal{M}})}$$

- (iv) Il nucleo del proiettore è  $\ker(P_{\mathcal{M}}) = \{\mathbf{x} \in \mathcal{H} : P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = 0\}$  ma  $\mathbf{x}$  è scomponibile in due parti, una nel sottospazio  $\mathcal{M}$  e l'altra nel suo ortogonale  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ , quindi  $P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = 0$  implica che  $\mathbf{x}' = 0$ . Quindi gli elementi del  $\ker(P_{\mathcal{M}})$  sono della forma

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} + \mathbf{x}''$$

e quindi  $\ker(P_{\mathcal{M}}) = \mathcal{M}^\perp$ .

- (v) Ogni elemento  $\mathbf{x}$  dello spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  e, come già visto scomponibile in due componenti  $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + \mathbf{x}''$ , quindi

$$(\mathbb{1} - P_{\mathcal{M}})(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \mathbf{x}' = \mathbf{x}''$$

e cioè  $(\mathbb{1} - P_{\mathcal{M}}) = P_{\mathcal{M}^\perp}$  □

**Teorema 10.15.** Sia  $P_{\mathcal{M}}$  un proiettore su  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$ , allora

- (i)  $P_{\mathcal{M}}^\dagger = P_{\mathcal{M}}$ ;  
(ii)  $P_{\mathcal{M}}^2 = P_{\mathcal{M}}$  cioè il proiettore è idempotente.

Inoltre vale anche un viceversa di questo teorema, cioè se  $A$  è un operatore con  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$  e  $A$  è autoaggiunto e idempotente, allora è un proiettore e

$$A = P_{\text{rank}(A)}$$

*Dimostrazione.* Sia  $P_{\mathcal{M}}$  un proiettore.  $\mathcal{D}(P_{\mathcal{M}}) = \mathcal{H}$ , allora l'aggiunto di  $P$  esiste. Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}|P_{\mathcal{M}}(\mathbf{y})) &= (\mathbf{x}|\mathbf{y}') = (\mathbf{x}'|\mathbf{y}') \\ &= (\mathbf{x}'|\mathbf{y}' + \mathbf{y}'') = (\mathbf{x}'|\mathbf{y}) = \\ &= (P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})|\mathbf{y}) \end{aligned}$$

cioè  $P_{\mathcal{M}}$  è autoaggiunto, e questo dimostra il punto (i).

Per il punto (ii) osserviamo che,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$

$$P_{\mathcal{M}}^2(\mathbf{x}) = P_{\mathcal{M}}(P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})) = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}') = \mathbf{x}' = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})$$

Per dimostrare il viceversa prendiamo un operatore  $A$  tale che  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ ,  $A = A^\dagger$  e  $A^2 = A$ . Allora varrà che anche  $\mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{H}$  e per il teorema 10.13  $A$  è limitato, e quindi continuo.

Possiamo ora dimostrare che  $\text{rank}(A)$  è un sottospazio. Sia  $\{\mathbf{x}_n\} \subset \text{rank}(A)$  e  $\mathbf{x}_n \rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{H}$  quando  $n$  tende a infinito. Allora esiste una successione  $\{\mathbf{y}_n\} \subset \mathcal{H}$  tale che  $\mathbf{x}_n = A(\mathbf{y}_n)$  per ogni  $n$ . Allora

$$A(\mathbf{y}_n) \rightarrow \mathbf{x} \quad \text{se } n \rightarrow \infty$$

ma, essendo  $A$  continua e idempotente

$$A(\mathbf{y}_n) = A(A(\mathbf{y}_n)) \rightarrow A(\mathbf{x})$$

cioè  $A(\mathbf{y}_n) \rightarrow A(\mathbf{x})$  e, per l'unicità del limite di successioni,  $A(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$  e quindi  $\mathbf{x} \in \text{rank}(A)$  e  $\text{rank}(A)$  è chiuso, quindi un sottospazio. Allora

$$\mathcal{H} = \text{rank}(A) \oplus \text{rank}(A)^\perp$$

e, un generico  $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$  potrà essere scritto come

$$\mathbf{x} = A(\mathbf{x}) + (\mathbf{x} - A(\mathbf{x}))$$

dove si può mostrare che  $(\mathbf{x} - A(\mathbf{x})) \in \text{rank}(A)^\perp$ , infatti, se  $\mathbf{y} \in \text{rank}(A)$ , ricordando che  $A$  è autoaggiunto

$$(A(\mathbf{x})|\mathbf{x} - A(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}|A(\mathbf{x} - A(\mathbf{x}))) = (\mathbf{x}|A(\mathbf{x}) - A^2(\mathbf{x})) = 0$$

quindi  $A(\mathbf{x}) = P_{\text{rank}(A)}(\mathbf{x})$  per ogni  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ , e questo conclude la dimostrazione.  $\square$

**Corollario 10.15.1.** *Sia  $P_{\mathcal{M}}$  un proiettore, allora*

$$(P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = \|P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})\|^2$$

*Dimostrazione.* Infatti

$$(P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = (P_{\mathcal{M}}^2(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = (P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})|P_{\mathcal{M}}^\dagger(\mathbf{x})) = (P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})|P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})) = \|P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x})\|^2$$

$\square$

*Osservazione 10.12.* Se  $A$  è un proiettore allora

$$A^\dagger A = A \quad \text{e} \quad A A^\dagger = A$$

**Teorema 10.16.** *Sia  $A$  un operatore lineare con  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- (i)  *$A$  è un proiettore;*
- (ii) *Esiste un sistema ortonormale  $\{\mathbf{u}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  in  $\mathcal{H}$  tale che*

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} (\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x}) \mathbf{u}_\alpha \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$$

*Se la prima parte dell'enunciato è verificata, allora  $A = P_{\overline{\text{span}(\{\mathbf{u}_\alpha\})}}$*

*Dimostrazione.* Iniziamo dimostrando la prima parte del teorema

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Supponiamo che  $A$  sia un proiettore,  $A = P_{\text{rank}(A)}$ , per un qualsiasi sistema ortonormale  $\{\mathbf{u}_\alpha\}$  e  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$  l'elemento  $A(\mathbf{x})$  è ben definito, infatti

$$\sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x})^2 \leq \|\mathbf{x}\|^2$$

e dunque, per il teorema di Fisher-Riesz, la serie  $\sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x}) \mathbf{u}_\alpha$  converge.



Scegliamo ora un s.o.n.c. per  $\mathcal{H}$  e prendiamo gli elementi  $\{\mathbf{u}_{\alpha'}\} \subset \{\mathbf{u}_{\alpha}\} \cap \text{rank}(A)$ ,  $\text{rank}(A)$  è un sottospazio di  $\mathcal{H}$ , quindi eredita da questo le proprietà di spazio di Hilbert ma  $\{\mathbf{u}_{\alpha'}\}$  non è necessariamente completo in questo sottospazio. Però  $A(\mathbf{x}) \in \text{rank}(A)$  è sviluppabile come elemento di  $\mathcal{H}$  come:

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_{\alpha}|A(\mathbf{x}))\mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (A(\mathbf{u}_{\alpha})|\mathbf{x})\mathbf{u}_{\alpha}$$

quindi se  $\mathbf{u}_{\alpha} \in \text{rank}(A)$ , allora  $A(\mathbf{u}_{\alpha}) = \mathbf{u}_{\alpha}$ , altrimenti  $A(\mathbf{u}_{\alpha}) = 0$ , e dunque

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha'=1}^{\infty} (\mathbf{u}_{\alpha'}|\mathbf{x})\mathbf{u}_{\alpha'}$$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Per ipotesi  $A(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{\infty} (\mathbf{u}_{\alpha}|\mathbf{x})\mathbf{u}_{\alpha}$  quindi

$$\begin{aligned} (A(\mathbf{x})|\mathbf{y}) &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} \overline{(\mathbf{u}_{\alpha}|\mathbf{x})}(\mathbf{u}_{\alpha}|\mathbf{y}) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{x}|\mathbf{u}_{\alpha})(\mathbf{u}_{\alpha}|\mathbf{y}) \\ &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{x}|(\mathbf{u}_{\alpha}|\mathbf{y})\mathbf{u}_{\alpha}) = (\mathbf{x}|A(\mathbf{y})) \end{aligned}$$

Inoltre, per ipotesi,  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H} = \mathcal{D}(A^{\dagger})$  quindi  $A$  è autoaggiunto.

Calcoliamo ora

$$\begin{aligned} A^2(\mathbf{x}) &= A(A(\mathbf{x})) = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_{\alpha}|A(\mathbf{x}))\mathbf{u}_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (A(\mathbf{u}_{\alpha})|\mathbf{x})\mathbf{u}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha=1}^{+\infty} (\mathbf{u}_{\alpha}|\mathbf{x})\mathbf{u}_{\alpha} = A(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

quindi  $A$  è anche idempotente, cioè  $A$  è un proiettore.

Dimostriamo ora la seconda parte. Per arrivare alla tesi dobbiamo mostrare che  $\text{rank}(A) = \overline{\text{span}\{\mathbf{u}_{\alpha}\}}$ .

Siccome valgono le ipotesi della prima parte dell'enunciato, possiamo dire che  $A(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha \in I} (\mathbf{u}_{\alpha}|\mathbf{x})\mathbf{u}_{\alpha} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ , quindi  $\text{rank}(A) \subseteq \overline{\text{span}\{\mathbf{u}_{\alpha}\}}$ ; proviamo ora a mostrare l'inclusione opposta.

Sia  $\mathbf{x} \in \ker(A)$ , allora  $\forall \mathbf{y} \in \overline{\text{span}\{\mathbf{u}_{\alpha}\}}$  possiamo scrivere

$$\mathbf{y} = \sum_{\alpha \in I} (\mathbf{u}_{\alpha}|\mathbf{y})\mathbf{u}_{\alpha} = A(\mathbf{y})$$

e dunque

$$(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|A(\mathbf{y})) = (A(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (0|\mathbf{y}) = 0$$

Dunque  $\mathbf{x} \in (\text{span}\{\mathbf{u}_{\alpha}\})^{\perp}$  e  $\ker(A) \subseteq (\text{span}\{\mathbf{u}_{\alpha}\})^{\perp}$ . Siccome  $A$  è un proiettore

$$\text{rank}(A) = (\text{rank}(A))^{\perp\perp} = (\ker(A))^{\perp} \supseteq (\text{span}\{\mathbf{u}_{\alpha}\})^{\perp\perp} = \overline{\text{span}\{\mathbf{u}_{\alpha}\}}$$

da cui la tesi. □

*Osservazione 10.13.* Quindi se  $\{\mathbf{u}_\alpha\}$  è un s.o.n.c. in  $\mathcal{H}$  allora  $\mathcal{H} = \overline{\text{span}(\mathbf{u}_\alpha)}$  e quindi  $A = P_{\mathcal{H}} = \mathbb{1}$ , ove  $A$  è l'operatore definito come sopra.

#### 10.5.1 Algebra dei proiettori

Nella seguente sezione mostreremo alcune proprietà delle operazioni con i proiettori, in questa trattazione  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{N}$  indicheranno due sottospazi di uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  mentre  $P_{\mathcal{M}}$  e  $P_{\mathcal{N}}$  i relativi proiettori.

**Teorema 10.17.** *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- (i)  $P_{\mathcal{M}} \circ P_{\mathcal{N}}$  è un proiettore;
- (ii)  $[P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}}] = P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} - P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = \mathbf{O}$ ;
- (iii)  $\mathcal{N} = (\mathcal{N} \cap \mathcal{M}) \oplus (\mathcal{N} \cap \mathcal{M}^\perp)$ .

Ovviamente, se  $P_{\mathcal{M}} \circ P_{\mathcal{N}}$  è un proiettore allora proietterà sullo spazio  $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo le prime due implicazioni del teorema. Se  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}$  è un proiettore, allora dev'essere autoaggiunto, quindi

$$\begin{aligned} (P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}})^\dagger &= (P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}) \\ P_{\mathcal{N}}^\dagger P_{\mathcal{M}}^\dagger &= P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

Unendo queste due relazioni otteniamo

$$P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} = P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}$$

e cioè  $[P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}}]$ .

Ripercorrendo i passaggi svolti in direzione opposta otteniamo che  $[P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}}] = 0$  se e solo se  $P_{\mathcal{M}}, P_{\mathcal{N}}$  è un proiettore.  $\square$

**Teorema 10.18.** *Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

- (i)  $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$  è un proiettore;
- (ii)  $P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = 0$ ;
- (iii)  $P_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}) = \{0\}$ , cioè  $\mathcal{M} \perp \mathcal{N}$ .

Inoltre se  $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$  è un proiettore  $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{M} \cup \mathcal{N}}$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo ancora le prime due implicazioni, se  $P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$  è un proiettore, allora dovrà essere idempotente

$$(P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}})^2 = P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}}$$

cioè, sviluppando il calcolo

$$\begin{aligned} & P_{\mathcal{M}}^2 + P_{\mathcal{N}}^2 + P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} \\ &= P_{\mathcal{M}} + P_{\mathcal{N}} + P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} + P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

e, come si può notare l'uguaglianza richiesta è verificata se l'anticommutatore tra i proiettori è nullo

$$P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = -P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}$$

quindi, moltiplicando a sinistra per  $P_{\mathcal{M}}$

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{M}}^2 P_{\mathcal{N}} &= -P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} \\ P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} &= -P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

invece, moltiplicando la stessa espressione a destra per  $P_{\mathcal{M}}$

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} &= -P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}}^2 \\ -P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} &= P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} \end{aligned}$$

quindi, unendo le due espressioni

$$P_{\mathcal{M}}P_{\mathcal{N}} = P_{\mathcal{N}}P_{\mathcal{M}} \quad \square$$

## 10.6 OPERATORI ISOMETRICI

**Definizione 10.19.** Un operatore  $A$ , definito su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$  è detto *isometrico* se  $\mathcal{D}(A) \equiv \mathcal{H}$  e se

$$\|A(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$$

Dalla definizione è immediato che

$$\|A\| = 1$$

*Osservazione 10.14.* Quindi se  $A$  è un operatore isometrico, necessariamente  $\ker(A) = \{0\}$ . Infatti

$$\|A(\mathbf{x})\| = 0 \Rightarrow \|\mathbf{x}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = 0$$

**Teorema 10.19.** Sia  $A$  un operatore lineare, con  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti

- (i)  $A$  è isometrico;
- (ii)  $(A(\mathbf{x})|A(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}|\mathbf{y})$ ;
- (iii)  $A^\dagger A = \mathbb{I}$ ;
- (iv) Esiste  $A^{-1}$  e  $A^\dagger$  è un'estensione di  $A^{-1}$ .

*Dimostrazione.* Dimostriamo le singole implicazioni

(i)  $\Rightarrow$  (ii) Dall'identità di polarizzazione

$$\begin{aligned} (A(\mathbf{x})|A(\mathbf{y})) &= \frac{1}{4}(\|A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})\|^2 - \|A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{y})\|^2) + \\ &\quad - \frac{i}{4}(\|A(\mathbf{x}) + iA(\mathbf{y})\|^2 - \|A(\mathbf{x}) - iA(\mathbf{y})\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|A(\mathbf{x} + \mathbf{y})\|^2 - \|A(\mathbf{x} - \mathbf{y})\|^2) - \frac{i}{4}(\|A(\mathbf{x} + i\mathbf{y})\|^2 - \|A(\mathbf{x} - i\mathbf{y})\|^2) \\ &= \frac{1}{4}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2) - \frac{i}{4}(\|\mathbf{x} + i\mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x} - i\mathbf{y}\|^2) \\ &= (\mathbf{x}|\mathbf{y}) \end{aligned}$$

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) Sia  $(A(\mathbf{x})|A(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}|\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{H}$ . Allora

$$(A(\mathbf{x})|A(\mathbf{y})) = (\mathbf{x}|A^\dagger A(\mathbf{y})) \Rightarrow A^\dagger A = \mathbb{1}$$

(iii)  $\Rightarrow$  (iv) Sia, per ipotesi  $A^\dagger A = \mathbb{1}$ , allora se  $\mathbf{x} \in \ker(A)$  allora  $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  ma anche

$$A^\dagger A(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

quindi  $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$ . Allora  $A^{-1}$  esiste e  $\text{rank}(A) \subset \mathcal{D}(A)$ , ma

$$\text{rank}(A) = \mathcal{D}(A^{-1}) \Rightarrow \mathcal{D}(A^{-1}) \subset \mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{H}$$

quindi  $A^\dagger$  è un'estensione di  $A^{-1}$ .

(iv)  $\Rightarrow$  (i) Calcoliamo la norma di  $A(\mathbf{x})$

$$\begin{aligned} \|A(\mathbf{x})\|^2 &= (A(\mathbf{x})|A(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}|A^\dagger A(\mathbf{x})) = (\mathbf{x}|A^{-1}A(\mathbf{x})) \\ &= (\mathbf{x}|\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

□

**Definizione 10.20.** Sia  $A$  un operatore lineare su  $\mathcal{H}$  e isometrico, allora  $A$  è detto *unitario* se

$$\text{rank}(A) = \mathcal{H}$$

*Osservazione 10.15.* Ovviamente, come già notato nel teorema precedente,  $\ker(A) = \{\mathbf{0}\}$

**Teorema 10.20.** Sia  $A$  un operatore lineare con  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ , allora le seguenti affermazioni sono equivalenti

(i)  $A$  è unitario;

(ii)  $\exists A^{-1}$  e  $A^{-1} = A^\dagger$ ;

(iii)  $A^\dagger A = AA^\dagger = \mathbb{1}$  (cioè  $[A, A^\dagger] = \mathbf{0}$ );

(iv)  $A^\dagger$  è unitario.

*Dimostrazione.* Dimostriamo le singole implicazioni

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Se  $A$  è unitario, allora è anche isometrico, quindi, per il teorema precedente,  $\exists A^{-1}$  e  $A^{-1} \subset A^\dagger$ , ma in questo caso,  $\mathcal{D}(A^{-1}) = \text{rank}(A) = \mathcal{H}$ , quindi  $\mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{D}(A^\dagger) = \mathcal{H}$  e cioè

$$A^{-1} = A^\dagger$$

- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) Per ipotesi  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A^{-1}) = \mathcal{H}$ , quindi  $\mathcal{D}(AA^{-1}) = \mathcal{D}(A^{-1}A) = \mathcal{H}$  e per definizione  $A^{-1}A = AA^{-1} = \mathbb{1}$ . Quindi, visto che per il punto (ii)  $A^{-1} = A^\dagger$  abbiamo che

$$AA^\dagger = A^\dagger A = \mathbb{1}$$

- (iii)  $\Rightarrow$  (iv) Per ipotesi  $AA^\dagger = A^\dagger A = \mathbb{1}$ . Quindi

$$\begin{aligned} \|A^\dagger \mathbf{x}\|^2 &= (A^\dagger \mathbf{x} | A^\dagger \mathbf{x}) = (\mathbf{x} | AA^\dagger \mathbf{x}) \\ &= (\mathbf{x} | \mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2 \end{aligned}$$

quindi  $A^\dagger$  è unitario,  $\|A\| = 1$ .

- (iv)  $\Rightarrow$  (i) Per ipotesi  $A^\dagger$  è unitario, ma quindi anche  $A^{\dagger\dagger}$  è unitario e quindi anche  $\overline{A}$ . Ma poiché  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ , allora  $A$  è chiuso e  $\overline{A} = A$ . Quindi  $A$  è unitario.  $\square$

**Teorema 10.21.** Sia  $A$  un operatore limitato con  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ . Sia  $\{\mathbf{u}_\alpha\}_{\alpha \in I}$  un s.o.n.c. in  $\mathcal{H}$ . Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti

- (i)  $A$  è unitario;  
(ii)  $\{A(\mathbf{u}_\alpha)\}_{\alpha \in I}$  è un s.o.n.c. in  $\mathcal{H}$ .

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un operatore limitato con  $\mathcal{D}(A) = \mathcal{H}$ . Dimostriamo le implicazioni.

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Per ipotesi,  $A$  è unitario,  $\text{rank}(A) = \mathcal{H}$ , quindi, preso un s.o.n.c.  $\{\mathbf{u}_\alpha\}$  in  $\mathcal{H}$  si ha che

$$(\mathbf{u}_\alpha | \mathbf{u}_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \Rightarrow (A(\mathbf{u}_\alpha) | A(\mathbf{u}_\beta)) = \delta_{\alpha\beta}$$

quindi  $\{A(\mathbf{u}_\alpha)\}$  è ortonormale, dobbiamo mostrarne la completezza. Dobbiamo quindi mostrare che  $\overline{\text{span}\{A(\mathbf{u}_\alpha)\}} = \mathcal{H}$  o, equivalentemente  $\text{span}\{A(\mathbf{u}_\alpha)\}^\perp = \{0\}$ . Prendiamo ora  $\mathbf{y} \in \mathcal{H}$  t.c.  $(\mathbf{y} | A(\mathbf{u}_\alpha)) = 0$ , siccome  $\text{rank}(A) = \mathcal{H}$  esisterà un  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$  t.c.  $\mathbf{y} = A(\mathbf{x})$  e quindi

$$0 = (\mathbf{y} | A(\mathbf{u}_\alpha)) = (A(\mathbf{x}) | A(\mathbf{u}_\alpha)) = (\mathbf{x} | \mathbf{u}_\alpha) \quad \forall \alpha \in I$$

quindi  $\mathbf{x} = 0$ , e  $\mathbf{y} = A(0) = 0$ , cioè  $\mathbf{y} = 0$ . Abbiamo quindi dimostrato che se  $\mathbf{y} \in \text{span}\{A(\mathbf{u}_\alpha)\}^\perp \Rightarrow \mathbf{y} = 0$ , cioè gli  $\{A(\mathbf{u}_\alpha)\}$  formano un sistema ortonormale completo.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) Sia, per ipotesi,  $\{A(\mathbf{u}_\alpha)\}$  un s.o.n.c.; prendiamo un  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ , allora esso è scrivibile come  $\mathbf{x} = \sum_\alpha (A(\mathbf{u}_\alpha)|\mathbf{x})A(\mathbf{u}_\alpha)$ , calcoliamone la norma

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_\alpha \|(A(\mathbf{u}_\alpha)|\mathbf{x})A(\mathbf{u}_\alpha)\|^2 = \sum_\alpha |(A(\mathbf{u}_\alpha)|A^\dagger(\mathbf{x}))|^2 = \|A^\dagger(\mathbf{x})\|^2$$

quindi  $\|A^\dagger(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| \forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ . Quindi  $A^\dagger$  è isometrico.

Dimosteremo ora che  $\ker(A) = \{0\}$ . Infatti,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$ ,

$$\mathbf{x} = \sum_\alpha (\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x})\mathbf{u}_\alpha \Rightarrow A(\mathbf{x}) = \sum_\alpha (\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x})A(\mathbf{u}_\alpha)$$

Se ora prendiamo  $\mathbf{x} \in \ker(A)$ , cioè  $A(\mathbf{x}) = 0$  otteniamo

$$\sum_\alpha (\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x})A(\mathbf{u}_\alpha) = 0$$

e quindi, essendo  $\{A(\mathbf{u}_\alpha)\}$  un s.o.n.c. abbiamo che  $(\mathbf{u}_\alpha|\mathbf{x}) = 0 \forall \alpha \in I$ , cioè  $\mathbf{x} = 0$ . Allora  $\ker(A) = \{0\}$ , ma  $\text{rank}(A^\dagger) = \ker(A)^\perp = \{0\}^\perp = \mathcal{H}$ . Concludiamo quindi che  $A^\dagger$  è unitario, e quindi, per il teorema precedente,  $A$  è unitario.  $\square$

**Esempio 10.9.** Sia  $A : \ell^2(\mathbb{R}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{R})$  come nell'esempio 10.5. Siccome  $\mathcal{D}(A) = \ell^2(\mathbb{R})$ ,  $A$  ammette aggiunto. Inoltre notiamo che poiché l'operatore  $A$  si limita a permutare gli elementi di una successione  $\{\alpha_n\} \in \ell^2(\mathbb{R})$

$$\|\{\alpha_n\}\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n|^2 = \|A(\{\alpha_n\})\|$$

cioè  $A$  è isometrico. Tuttavia poiché  $\text{rank}(A) = \ell^2(\mathbb{R})$ , possiamo affermare che  $A$  è unitario.

Notiamo inoltre dalla forma matriciale di  $A$  che  $A^\dagger = A$ , quindi, essendo come già detto anche unitario, possiamo affermare che  $A^{-1} = A^\dagger = A$ , cioè  $A$  è involuttivo.

**Definizione 10.21.** Siano  $A$  e  $B$  due operatori lineari su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}$ , con  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B) = \mathcal{H}$ ; se esiste un operatore unitario  $U$  tale che

$$B = UAU^\dagger$$

allora diremo che  $A$  e  $B$  sono *unitariamente equivalenti*.

## 10.7 TEORIA SPETTRALE

in questa sezione ci proponiamo di estendere a spazi di Hilbert il concetto di autovalore e autovettore.

**Definizione 10.22** (Insieme risolvente). Chiamiamo insieme risolvente di un operatore lineare  $A : \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  l'insieme

$$\rho(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (\lambda \mathbb{1} - A)^{-1} \text{ limitato e } \overline{\mathcal{D}(\lambda \mathbb{1} - A)^{-1}} = \mathcal{H}\}$$

Per comodità indichiamo con

$$\Lambda = \lambda \mathbb{1}$$

**Definizione 10.23.** Chiamiamo operatore risolvante di  $A$  rispetto a  $\lambda \in \rho(A)$  l'operatore  $R_A(\lambda)$  tale che

$$R_A(\lambda)(\Lambda - A) = \mathbb{1} \quad \text{e} \quad (\Lambda - A)R_A(\lambda) = \mathbb{1}$$

Notiamo che

$$R_A(\lambda) = (\Lambda - A)^{-1}$$

Per comodità possiamo scrivere l'insieme risolvante come unione di due sottoinsiemi

$$\rho(A) = \rho_a(A) \cup \rho_b(A)$$

ove si è indicati

$$\rho_a(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\Lambda - A) \text{ esiste, limitato e } \mathcal{D}(\Lambda - A)^{-1} = \mathcal{H}\}$$

$$\rho_b(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (\Lambda - A) \text{ esiste, limitato e } \mathcal{D}(\Lambda - A)^{-1} \subset \mathcal{H} \text{ ma } \overline{\mathcal{D}(\Lambda - A)^{-1}} = \mathcal{H}\}$$

**Definizione 10.24** (Spettro). Chiamiamo spettro di un operatore lineare  $A$  il complementare di  $\rho(A)$  in  $\mathbb{C}$ , vale a dire l'insieme

$$\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \notin \rho(A)\}$$

Anche lo spettro di un operatore può essere scritto come unione di sottoinsiemi

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A)$$

ognuno dei quali vanifica un'ipotesi sulla definizione dell'insieme risolvante; analizziamo tale classificazione

- (i)  $\sigma_p(A)$  viene detto *spettro puntuale* o *discreto*, ed è definito come segue

$$\sigma_p(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \nexists (\Lambda - A)^{-1}\}$$

La definizione data equivale a dire che  $\exists \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$  t.c.  $\mathbf{x} \in \ker(\Lambda - A)$ , cioè  $(\Lambda - A)(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , da cui

$$A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$$

Dunque l'insieme  $\sigma_p(A)$  coincide con quello degli autovalori come erano intesi nel caso finito dimensionale, per questo i  $\lambda \in \sigma_p(A)$  vengono chiamati autovalori propri di  $A$ , l'elemento  $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$  corrispondente viene detta autovettore o autofunzione di  $A$  rispetto a  $\lambda$  e lo spazio  $\ker(\Lambda - A)$  è detto autovarietà associata a  $\lambda$ .

(ii)  $\sigma_c$  è detto *spettro continuo* e si definisce come

$$\sigma_c(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (\Lambda - A)^{-1} \text{ non limitato, e } \overline{\mathcal{D}(\Lambda - A)^{-1}} = \mathcal{H}\}$$

Lo spettro continuo si può dividere, così come visto per l'insieme risolvibile, in  $\sigma_{ca}(A)$  e  $\sigma_{cb}(A)$  a seconda che  $\mathcal{D}(\Lambda - A)^{-1}$  sia uguale a  $\mathcal{H}$  o un suo sottospazio denso.

(iii)  $\sigma_r(A)$  viene invece chiamato *spettro residuo* ed è definito come segue

$$\sigma_r(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists (\Lambda - A)^{-1} \text{ ma } \overline{\mathcal{D}(\Lambda - A)^{-1}} \neq \mathcal{H}\}$$

A sua volta si usa dividere  $\sigma_r(A) = \sigma_{r1}(A) \cup \sigma_{r2}(A)$  ove

$$\sigma_{r1}(A) := \{\lambda \in \sigma_r(A) : \exists (\Lambda - A)^{-1} \text{ limitato}\}$$

$$\sigma_{r2}(A) := \{\lambda \in \sigma_r(A) : \exists (\Lambda - A)^{-1} \text{ non limitato}\}$$

Valutiamo ora le proprietà dello spettro per i diversi tipi di operatori visti.

#### Spettro dell'operatore aggiunto

Supponiamo che  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$ , allora se  $\lambda \in \rho(A)$  avremo che  $\bar{\lambda} \in \rho(A^\dagger)$ .

Inoltre se  $\lambda \in \sigma_p(A)$ , cioè  $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ , allora

$$(\mathbf{x}|A^\dagger(\mathbf{y})) = (A(\mathbf{x})|\mathbf{y}) = (\lambda \mathbf{x}|\mathbf{y}) = (\mathbf{x}|\bar{\lambda} \mathbf{y})$$

quindi

$$A^\dagger(\mathbf{y}) = \bar{\lambda} \mathbf{y}$$

cioè  $\bar{\lambda} \in \sigma_p(A^\dagger)$ .

#### Spettro di un operatore simmetrico

Consideriamo il caso in cui sia  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  lineare tale per cui  $\overline{\mathcal{D}(A)} = \mathcal{H}$  e  $A \subset A^\dagger$ .

**Teorema 10.22.** *Sia  $A$  come sopra, allora  $\sigma_p(A), \sigma_c(A), \sigma_{r2}(A) \subset \mathbb{R}$*

*Dimostrazione.* Sia  $\lambda \in \mathbb{C}, \forall \mathbf{x} \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned} \|(\Lambda - A)(\mathbf{x})\|^2 &= \|(\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x}) + i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x})\|^2 =^2 \\ &= \|(\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x}) + i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x})\| \|(\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x}) + i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x})\| \\ &= \|\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x})\|^2 + \|i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x})\|^2 + \\ &\quad + \|(\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x})\| \|i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x})\| + \|i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x})\| \|(\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x})\| \end{aligned}$$

Notiamo che

$$\begin{aligned} &(\|(\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x})\| \|i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x})\| + \|i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x})\| \|(\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x})\|) \\ &= i \operatorname{Im}(\Lambda) ((\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - i \operatorname{Im}(\Lambda) (\mathbf{x}|(\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x})) \\ &= i \operatorname{Im}(\Lambda) \operatorname{Re}(\Lambda)(\mathbf{x}|\mathbf{x}) - i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x}|A(\mathbf{x})) + i \operatorname{Im}(\Lambda) \operatorname{Re}(\Lambda)(\mathbf{x}|\mathbf{x}) + i \operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x}|A(\mathbf{x})) \\ &= i \operatorname{Im}(\Lambda) ((A(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - (\mathbf{x}|A(\mathbf{x}))) = 0 \end{aligned}$$



ove l'ultimo passaggio deriva dalla simmetria di  $A$ . Dunque

$$\|(\Lambda - A)(\mathbf{x})\|^2 = \|\operatorname{Re}(\Lambda) - A)(\mathbf{x})\|^2 + \|\operatorname{Im}(\Lambda)(\mathbf{x})\|^2 \geq |\operatorname{Im}(\lambda)|^2 \|\mathbf{x}\|^2$$

cioè

$$\|(\Lambda - A)(\mathbf{x})\| \geq |\operatorname{Im}(\lambda)| \|\mathbf{x}\|$$

Per il teorema 10.6 se  $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$  allora  $(\Lambda - A)^{-1}$  esiste limitato, dunque  $\lambda \in \rho(A) \cup \sigma_{r1}(A)$ , da cui la tesi.  $\square$

**Teorema 10.23.** Se  $A$  è simmetrico e  $\lambda, \lambda' \in \sigma_p(A)$ , con  $\lambda \neq \lambda'$ , allora  $\ker(\Lambda - A) \perp \ker(\Lambda' - A)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\mathbf{x} \in \ker(\Lambda - A)$  e  $\mathbf{x}' \in \ker(\Lambda' - A)$ , allora

$$\begin{aligned} 0 &= ((\Lambda - A)(\mathbf{x})|\mathbf{x}') - (\mathbf{x}|(\Lambda' - A)(\mathbf{x}')) \\ &= \overline{\lambda}(\mathbf{x}|\mathbf{x}') - (A(\mathbf{x})|\mathbf{x}') - \lambda'(\mathbf{x}|\mathbf{x}') + (\mathbf{x}|A(\mathbf{x}')) \\ &= (\lambda - \lambda')(\mathbf{x}|\mathbf{x}') \end{aligned}$$

Perciò  $(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = 0 \implies \mathbf{x} \perp \mathbf{x}'$ .  $\square$

Questo teorema equivale a dire che gli autovettori relativi ad autovalori distinti sono ortogonali.

*Spettro di un operatore autoaggiunto*

**Teorema 10.24.** Sia  $A$  un operatore autoaggiunto, allora  $\sigma_r(A) = \emptyset$

*Dimostrazione.* Per le ipotesi, anche  $(\Lambda - A)$  sarà un operatore autoaggiunto e  $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ . Se  $(\Lambda - A)^{-1}$  esiste allora possiamo dire che

$$((\Lambda - A)^{-1})^\dagger = ((\Lambda - A)^\dagger)^{-1} = (\overline{\Lambda} - A^\dagger)^{-1} = (\Lambda - A)^{-1}$$

e dunque  $(\Lambda - A)^{-1}$  ammette aggiunto, cioè  $\overline{\mathcal{D}(\Lambda - A)^{-1}} = \mathcal{H}$ , quindi  $\sigma_r(A) = \emptyset$   $\square$

*Osservazione 10.16.* Riassumiamo le proprietà di un operatore tale per cui  $A = A^\dagger$

- (i)  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A) \subset \mathbb{R}$
- (ii) Ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali
- (iii) Le autovarietà associate ad ogni autovalore di  $\sigma_p(A)$  sono sottospazi di Hilbert di  $\mathcal{H}$ , dunque per ognuna di esse è possibile trovare un s.o.n.c., che sarà un s.o.n. per  $\mathcal{H}$ . In generale l'unione di questi s.o.n.c. sarà un s.o.n. per  $\mathcal{H}$ ; tuttavia se  $\sigma(A) = \sigma_p(A)$  si può dimostrare che il s.o.n. in questione sarà anche un s.o.n.c. per  $\mathcal{H}$ . Dunque se indichiamo con  $\mathcal{H}_{\lambda_i}$  l'autospazio associato all' $i$ -simo autovalore, possiamo scrivere

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{+\infty} \oplus \mathcal{H}_{\lambda_i}$$

Questo fatto è particolarmente utile, infatti ora per trovare un sistema di generatori in uno spazio di Hilbert basta trovare un operatore con spettro solo puntuale.

### Spettro di un proiettore

**Teorema 10.25.** *Sia  $P$  un proiettore, allora  $\sigma(P) = \sigma_p(P)$  e*

- (i) *Se  $P = \mathbf{0}$  allora  $\sigma(P) = \{0\}$  e  $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}$*
- (ii) *Se  $P = \mathbf{1}$  allora  $\sigma(P) = \{1\}$  e  $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$*
- (iii) *Se  $P \neq \mathbf{0}, \mathbf{1}$  e  $P \equiv P_{\mathcal{M}}$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ , allora  $\sigma(P) = \{0, 1\}$  e a  $\lambda = 0$  corrisponde l'autospazio  $\mathcal{M}^\perp$ , mentre a  $\lambda = 1$  corrisponde l'autospazio  $\mathcal{M}$*

*Dimostrazione.* Dimostriamo solo il punto (iii).

Sia

$$\mathbf{x} = \underbrace{\mathbf{x}'}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{\mathbf{x}''}_{\in \mathcal{M}^\perp} \in \mathcal{H}$$

allora

$$\mathbf{x}' = P_{\mathcal{M}}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} = \lambda(\mathbf{x}' + \mathbf{x}'')$$

da cui

$$(1 - \lambda)\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{x}''$$

siccome  $\mathbf{x}'$  e  $\mathbf{x}''$  sono linearmente indipendenti, gli unici casi in cui si verifica tale uguaglianza sono

- $\mathbf{x}' = \mathbf{0}$  e  $\lambda = 0$ , cioè  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}^\perp$
- $\mathbf{x}'' = \mathbf{0}$  e  $\lambda = 1$ , cioè  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$

cioè la tesi. □

### Spettro di un operatore unitario

**Teorema 10.26.** *Sia  $A$  un operatore unitario, allora*

- (i)  $\sigma_r(A) = \emptyset$
- (ii)  $\sigma_p(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| = 1\}$
- (iii) *Ad autovalori distinti corrispondono autovettori ortogonali.*

*Dimostrazione.* Proviamo solo la (ii) e la (iii).

Se  $\lambda$  è autovalore allora

$$A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \quad \text{e} \quad A^\dagger(\mathbf{x}) = \bar{\lambda} \mathbf{x}$$

Per cui

$$A(A^\dagger(\mathbf{x})) = A(\bar{\lambda} \mathbf{x})$$

$$\mathbf{1}\mathbf{x} = \bar{\lambda}A(\mathbf{x}) = \bar{\lambda}\lambda \mathbf{x}$$

da cui

$$|\lambda|^2 = 1$$

Completiamo la dimostrazione del teorema provando la (iii). Siano

$$A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \quad \text{e} \quad A(\mathbf{x}') = \lambda' \mathbf{x}'$$

allora

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}|\mathbf{x}') &= (A^\dagger(A(\mathbf{x}))|\mathbf{x}') = (A(\mathbf{x})|A(\mathbf{x}')) \\ &= (\lambda \mathbf{x}|\lambda' \mathbf{x}') = \bar{\lambda} \lambda' (\mathbf{x}|\mathbf{x}') \end{aligned}$$

quindi

$$(1 - \bar{\lambda} \lambda')(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = 0$$

da cui  $(\mathbf{x}|\mathbf{x}') = 0$ , che è la tesi.  $\square$

Enunciamo ora un teorema che permette di comprendere meglio la definizione data di spettro continuo.

**Teorema 10.27.**  $\forall \lambda \in \sigma_c(A)$  esiste una successione  $\{\mathbf{x}_n\} \subset \mathcal{D}(A)$  tale per cui

$$\|A(\mathbf{x}_n) - \lambda \mathbf{x}_n\| \rightarrow 0 \quad \text{per} \quad n \rightarrow +\infty$$

*Dimostrazione.* Siccome  $\lambda \in \sigma_c(A)$  allora  $(\Lambda - A)^{-1}$  esiste ma non è limitato, dunque esiste una successione  $\{\mathbf{y}_n\} \subset \mathcal{D}(\Lambda - A)^{-1}$  tale per cui

$$\| \underbrace{(\Lambda - A)^{-1}(\mathbf{y}_n)}_{\mathbf{w}_n} \| \geq n \|\mathbf{y}_n\|$$

cioè, essendo  $\mathbf{y}_n = (\Lambda - A)(\mathbf{w}_n)$

$$\|(\Lambda - A)(\mathbf{w}_n)\| \leq \frac{1}{n} \|\mathbf{w}_n\|$$

Sia allora  $\mathbf{x}_n = \frac{\mathbf{w}_n}{\|\mathbf{w}_n\|}$ , per quanto visto prima

$$\|(\Lambda - A)(\mathbf{x}_n)\| = \|\lambda \mathbf{x}_n - A(\mathbf{x}_n)\| \leq \frac{1}{n} \rightarrow 0$$

che è la tesi.  $\square$

*Osservazione 10.17.* Il teorema precedente mostra che in generale per scrivere l'equazione agli autovalori

$$A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \notin \mathcal{H}$$

per un  $\lambda$  appartenente allo spettro continuo bisogna lavorare con uno spazio di Hilbert più grande, in generale questo sarà uno spazio di distribuzioni. L'equazione agli autovalori in senso generalizzato può essere scritta  $\forall \mathbf{y} \in \mathcal{H}$

$$(\mathbf{x}|A(\mathbf{y})) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}|\mathbf{y})$$

Grazie a questa visione generalizzata di autovalore e autovettore possiamo enunciare il teorema spettrale, di cui non è data la dimostrazione.

**Teorema 10.28** (Teorema spettrale). *Sia  $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un operatore lineare autoaggiunto e sia  $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$  il suo spettro. Sia  $\{\mathbf{u}_\alpha\} \subset \mathcal{H}$  il s.o.n. generato dall'unione degli autospazi corrispondenti a ciascun  $\lambda_\alpha \in \sigma_p(A)$  e siano  $\{\mathbf{u}_\lambda\}$  gli autovalori (nel senso generalizzato visto prima) corrispondenti ai  $\lambda \in \sigma_c(A)$ , allora,  $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{H}$*

(i)

$$\mathbf{x} = \sum_{\alpha} (\mathbf{u}_\alpha | \mathbf{x}) \mathbf{u}_\alpha + \int_{\sigma_c(A)} a(\lambda) \mathbf{u}_\lambda d\lambda$$

ove  $a(\lambda)$  sono detti coefficienti di Fourier generalizzati, e sono definiti come

$$a(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\lambda} (\Delta \mathbf{u}_\lambda | \mathbf{x}) \quad e \quad \Delta \mathbf{u}_\lambda = \int_{\lambda}^{\lambda+\Delta\lambda} \mathbf{u}_{\lambda'} d\lambda' \in \mathcal{H}$$

(ii)

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{\alpha} |(\mathbf{u}_\alpha | \mathbf{x})|^2 + \int_{\sigma_c(A)} |a(\lambda)|^2 d\lambda$$

(iii)

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha (\mathbf{u}_\alpha | \mathbf{x}) \mathbf{u}_\alpha + \int_{\sigma_c(A)} \lambda a(\lambda) \mathbf{u}_\lambda d\lambda$$

Analizziamo ora un particolare operatore lineare che opera in spazi di Hilbert, la trasformata di Fourier. Lo scopo è di generalizzare quanto visto per la serie di Fourier per funzioni non periodiche, o alternativamente, per funzioni di periodo infinito.

Il nostro scopo è arrivare a definire la trasformata di Fourier come un operatore  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  anche se, come si noterà, la definizione non è immediatamente ampliabile a tali spazi.

### 11.1 TRASFORMATA DI FOURIER IN $L^1(\mathbb{R})$

**Definizione 11.1** (Trasformata di Fourier in  $L^1(\mathbb{R})$ ). Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , chiamiamo trasformata di Fourier l'operatore  $\mathcal{F}$  così definito

$$(\mathcal{F}f)(k) = \widehat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \quad k \in \mathbb{R}$$

Allo stesso modo è possibile definire la trasformata di Fourier coniugata come

$$(\overline{\mathcal{F}}f)(k) = \widehat{f}(k) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) dx$$

Dalla linearità dell'integrale è immediato ricavare la seguente proposizione

**Proposizione 11.1.** *L'operatore  $\mathcal{F}$  è lineare.*

Valutiamo ora il dominio di questo operatore.

Siccome  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $\mathcal{F}f$  è ben definito, infatti

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ikx} f(x)| dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|f\|_{L^1} < +\infty \end{aligned}$$

quindi  $\widehat{f}$  è una funzione limitata e

$$\sup_{k \in \mathbb{R}} |\widehat{f}| \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\sqrt{2\pi}}$$

Perciò  $\widehat{f} \in L^\infty(\mathbb{R})$  e

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \frac{\|f\|_{L^1}}{\sqrt{2\pi}}$$

Perciò possiamo dire che l'operatore  $\mathcal{F}$  mappa funzioni in  $L^1(\mathbb{R})$  in funzioni in  $L^\infty(\mathbb{R})$ .

**Teorema 11.1.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora la sua trasformata di Fourier  $\widehat{f}$  è una funzione continua.

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k+h) - \widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} (e^{-ihx} - 1) f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ihx} - 1| |f(x)| dx \end{aligned}$$

Se dimostriamo che

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |e^{-ihx} - 1| |f(x)| dx = 0$$

allora abbiamo la tesi.

Siccome  $|e^{-ihx} - 1| < 2$ , la funzione integranda è maggiorabile da una funzione integrabile, ossia  $|2f(x)|$ , per il teorema della convergenza dominata è possibile portare il limite sotto il segno di integrale, e poichè

$$\lim_{h \rightarrow 0} |e^{-ihx} - 1| = 0$$

si ha l'asserto. □

Notiamo che, siccome la continuità di  $\widehat{f}$  è indipendente da  $k$ ,  $\widehat{f}$  sarà anche uniformemente continua.

**Teorema 11.2** (di Riemman-Lebesgue). Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora

1.  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R})$  e  $\|\mathcal{F}f\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}/\sqrt{2\pi}$
2.  $\mathcal{F}$  è un'operatore continuo
3.  $\lim_{k \rightarrow \infty} |\widehat{f}| = 0$

*Dimostrazione.* Notiamo che il punto (i) è già stato dimostato precedentemente e il (ii) è immediato dal fatto che  $\mathcal{F}$  è un operatore lineare limitato. Dimostriamo allora il punto (iii).

Partiamo dal caso particolare in cui  $f = \chi_{[a,b]}$ , allora

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \chi_{[a,b]} dx \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ikx} dx \right| \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{ik} e^{-ikb} (1 - e^{ik(b-a)}) \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|k|} |1 - e^{ik(b-a)}| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{|k|} \rightarrow 0 \quad \text{per } k \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

Poichè l'integrale di una funzione in  $L^1(\mathbb{R})$  è, per definizione di integrale di Lebesgue, una sommatoria di funzioni a gradino, è possibile utilizzare questo risultato per ogni funzione integrabile, quindi per tutto  $L^1(\mathbb{R})$ . □

**Teorema 11.3.** Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ , allora anche  $f \cdot \hat{g}, \hat{f} \cdot g \in L^1(\mathbb{R})$  e

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(x) g(x) dx$$

*Dimostrazione.* Siccome  $\hat{g}, \hat{f}$  sono limitate e  $f, g$  sono integrabili, anche  $f \cdot \hat{g}, \hat{f} \cdot g$  saranno integrabili. Inoltre

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \hat{g}(x) dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-itx} g(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-itx} f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \hat{f}(t) dt \end{aligned}$$

□

**Teorema 11.4.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$  tale che  $x^p f \in L^1(\mathbb{R})$  per  $p = 1, \dots, n$ , allora  $\hat{f}$  è derivabile  $n$  volte e

$$\frac{d^p}{dk^p} \hat{f}(k) = [\mathcal{F}((-ix)^p f)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} (-ix)^p f(x) dx$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dk^p} \hat{f}(k) &= \frac{d^p}{dk^p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^p}{dk^p} e^{-ikx} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} (-ix)^p f(x) dx \end{aligned}$$

$\forall p = 1, \dots, n$ , che è la tesi. □

**Teorema 11.5.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$  tale che  $f^{(p)} \in L^1(\mathbb{R}) \forall p = 1, \dots, n$  allora

$$\mathcal{F}(f^{(p)})(k) = (ik)^p \hat{f}(k) \quad \forall p = 1, \dots, n$$

*Dimostrazione.* Il teorema si dimostra per induzione integrando per parti, sia dunque  $p = 1$ , allora

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(k) &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ikx} f'(x) dx \\ &= \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-ikx} f(x)]_{-a}^a - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a (-ik) e^{-ikx} f(x) dx = \end{aligned}$$

siccome  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , il suo limite all'infinito deve tendere a zero, quindi il termine fuori dall'integrale è zero, cioè

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (ik) e^{-ikx} f(x) dx = (ik) \hat{f}(k)$$

Applicando quanto visto a  $f'$  e alle altre derivate si ha l'asserto. □

**Teorema 11.6.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora

$$\overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(\bar{f})$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}\overline{\mathcal{F}(f)}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\left(e^{-ikx} f(x)\right)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} \overline{f(x)} dx = \mathcal{F}(\bar{f})(k)\end{aligned}$$

□

Verifichiamo ora cosa succede alla trasformata di Fourier se viene cambiata la parità della funzione su cui agisce; a tale scopo definiamo l'operatore  $\sigma$  come segue

$$\sigma(f)(x) = f(-x) = f_{\sigma}(x)$$

**Teorema 11.7.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , allora

$$(\mathcal{F}(f))_{\sigma} = \overline{\mathcal{F}(f)} = \mathcal{F}(f_{\sigma})$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(f))_{\sigma} &= (\mathcal{F}(f))(-k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) dx = \overline{\mathcal{F}(f)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt} f(-t) dt = \mathcal{F}(f_{\sigma})\end{aligned}$$

□

**Osservazione 11.1.** Se  $f$  è pari, cioè  $f_{\sigma} = f$ , allora  $\hat{f} = \hat{f}_{\sigma}$ , mentre se  $f$  è dispari, vale a dire  $f_{\sigma} = -f$ , allora  $\hat{f}_{\sigma} = -\hat{f}$ .

Inoltre poiché  $e^{-ikx} = \cos(kx) - i \sin(kx)$ , cioè è formato da una parte pari e una dispari, è ovvio che se  $f$  è pari, spezzando l'integrale e calcolandolo su tutto l'asse reale, l'integrale contenente il seno si annullerà. Analogamente se  $f$  è dispari si annullerà l'integrale contenente il coseno, quindi possiamo ricavare le seguenti formule per il calcolo della trasformata di Fourier per funzioni di parità nota

(i) Se  $f$  è pari

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(kx) f(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos(kx) f(x) dx$$

l'operatore  $\mathcal{F}$  in questo caso viene detto *trasformata coseno*.

(ii) Se  $f$  è dispari

$$\hat{f}(k) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(kx) f(x) dx = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin(kx) f(x) dx$$

questa volta  $\mathcal{F}$  è detto *trasformata seno*.



*Osservazione 11.2.* A partire dall'osservazione precedente possiamo riassumere le proprietà di una trasformata di Fourier di una funzione a parità definita.

- (i) se  $f$  è reale e pari, allora  $\widehat{f}$  sarà reale e pari;
- (ii) se  $f$  è reale e dispari, allora  $\widehat{f}$  sarà immaginaria e dispari.

**Teorema 11.8.** Sia  $\tau_\alpha$  l'operatore di traslazione

$$\tau_\alpha(f)(x) = f(x - \alpha)$$

allora, se  $f \in L^1(\mathbb{R})$  si ha

$$\widehat{\tau_\alpha f}(k) = e^{-ik\alpha} \widehat{f}(k)$$

mentre

$$\tau_\alpha \widehat{f}(k) = \widehat{f}(k - \alpha) = \widehat{e^{i\alpha x} f}(k)$$

*Dimostrazione.* Le dimostrazione è banale dalla definizione di trasformata

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_\alpha f)(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} f(x - \alpha) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(t+\alpha)} f(t) dt \\ &= \frac{e^{-ik\alpha}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikt} f(t) dt = e^{-ik\alpha} \widehat{f}(k) \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} \tau_\alpha \widehat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(k-\alpha)x} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} (e^{i\alpha x} f(x)) dx = \widehat{e^{i\alpha x} f}(k) \end{aligned}$$

□

*Osservazione 11.3.* Possiamo ora introdurre il concetto di trasformata di Fourier della funzione  $\delta$  di Dirac, infatti calcolandone la trasformata

$$\mathcal{F}(\delta)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \delta(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

dalla quale osserviamo che la  $\delta$  è l'antitrasformata della funzione costante. Otteniamo quindi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx} dx = 2\pi \delta(k)$$

*Osservazione 11.4.* Come abbiamo già osservato, l'operatore  $\mathcal{F}$  mappa funzioni in  $L^1$  in funzioni in  $L^\infty$ , e, in generale non è invertibile. Sotto ipotesi aggiuntive invece la trasformata di Fourier diviene un'operatore invertibile, come specificato nel seguente teorema.

**Teorema 11.9.** Se  $f \in L^1$  e  $\widehat{f} \in L^1$  allora  $\mathcal{F}$  è invertibile e

$$\overline{\mathcal{F}(\widehat{f})} = f$$

cioè  $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}(\widehat{f})}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \widehat{f}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} f(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2\pi} f(y) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)} dk = \int_{-\infty}^{+\infty} dy f(y) \delta(x-y) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo sfruttato la definizione di  $\delta$  data nell'osservazione 11.3. Quindi,  $\overline{\mathcal{F}(\mathcal{F}f)} = f$ , e cioè  $\mathcal{F}\mathcal{F} \subset \mathbb{1}$ .  $\square$

Enunciamo ora un utile teorema, di cui non è data la dimostrazione, che stabilisce se esiste la trasformata di Fourier inversa di una certa funzione senza svolgere direttamente il calcolo.

**Teorema 11.10.** Sia  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  tale che  $f, f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ , allora  $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ .

## 11.2 TRASFORMATA DI FOURIER IN $L^2(\mathbb{R})$

Per arrivare alla definizione di trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$  passiamo attraverso la definizione di uno spazio,  $\mathcal{S}$  tale che  $\overline{\mathcal{S}} = L^2(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ .

**Definizione 11.2** (Funzione a decrescenza rapida). Diciamo che una funzione  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  è a decrescenza rapida se

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x^p f(x)| = 0 \quad \forall p \in \mathbb{R}$$

*Esempio 11.1.*  $f(x) = e^{-\alpha x^2}$  e  $f(x) = e^{-|x|}$  sono funzioni a decrescenza rapida.

**Teorema 11.11.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$  a decrescenza rapida, allora  $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 11.12.** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$  a decrescenza rapida, allora  $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty$ .

*Dimostrazione.* Siccome  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e a decrescenza rapida, per il teorema precedente  $x^n f(x) \in L^1(\mathbb{R})$ ; per il teorema 11.4 possiamo affermare che

$$\frac{d^n}{dk^n} \widehat{f}(k) = \mathcal{F}((-ix)^n f(x))(k)$$

e quindi  $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty$ .  $\square$

**Teorema 11.13.** Sia  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Se  $f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R}) \forall n \in \mathbb{N}$ , allora  $\widehat{f}$  è a decrescenza rapida.

*Dimostrazione.* Siccome, per il teorema 11.5

$$\widehat{f^{(p)}}(k) = (ik)^p \widehat{f}$$

per il teorema di Riemman-Lebesgue

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} |\widehat{f^{(p)}}(k)| = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} |(ik)^p \widehat{f}| = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} |k^p \widehat{f}|$$

che è la tesi.  $\square$

**Definizione 11.3** (Spazio di Schwartz). Chiamiamo spazio di Schwartz l'insieme  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  delle funzioni così definite

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f \in \mathcal{C}^\infty \text{ e } f^{(k)} \text{ è a decrescenza rapida } \forall k = 0, 1, \dots\}$$

Si può dimostrare che questo spazio soddisfa la definizione di spazio topologico rispetto alla topologia  $\tau$  che ha per aperti le sfere

$$B(r, f_0) := \{f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) : \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p (f_0 - f)^{(q)}(x)| < r, \forall p, q \in \mathbb{N}\}$$

dunque diremo che una successione  $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  converge a  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^p (f_n - f)^{(q)}(x)| = 0, \forall p, q \in \mathbb{N}$$

Lo spazio di Schwartz gode delle seguenti evidenti proprietà

- (i)  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è invariante rispetto alla moltiplicazione per polinomi
- (ii)  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è invariante per derivazione
- (iii)  $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^1(\mathbb{R})$

**Teorema 11.14.** Se  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$  allora anche  $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ , cioè la trasformata di Fourier è un endomorfismo  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$

*Dimostrazione.* Se  $f$  appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  allora  $f \in L^1(\mathbb{R})$  ed è a decrescita rapida. Esiste anche  $\widehat{f} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Inoltre ogni  $f^{(p)} \in L^1(\mathbb{R})$ , ed esistono tutte le  $\widehat{f^{(p)}}$ . Quindi

$$k^p \widehat{f^{(p)}}(k) = k^{(p)} \mathcal{F}((-ix)^p f)(k) = \mathcal{F}\left(\frac{d^p}{dx^p}(-ix)^p f\right)(k)$$

e, dal teorema di Riemann-Lebesgue otteniamo che

$$\lim_{|k| \rightarrow \infty} |k^p \widehat{f^{(p)}}(k)| = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \left| \mathcal{F}\left(\frac{d^p}{dx^p}(-ix)^p f(x)\right)(k) \right| = 0$$

quindi  $\widehat{f}$  e  $\widehat{f^{(p)}}$  sono a decrescita rapida, cioè sono in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Teorema 11.15.** *L'operatore  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$  è un operatore continuo (e quindi limitato). cioè*

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \Rightarrow \widehat{f}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \widehat{f}$$

L'operatore  $\mathcal{F}$  è un'applicazione invertibile in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  e la sua inversa è  $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$ .

**Teorema 11.16.**  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  è denso in  $L^2(\mathbb{R})$ , cioè  $\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R})} = L^2(\mathbb{R})$ .

**Definizione 11.4** (Trasformata di Fourier in  $L^2(\mathbb{R})$ ). Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ , e  $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$  una successione tale che  $f_n \rightarrow f$  per  $n \rightarrow \infty$ . Definiamo trasformata di Fourier di  $f$

$$\mathcal{F}(f)(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\mathcal{F}f_n)$$

**Teorema 11.17.** *L'operatore  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$  è un'isometria di  $L^2(\mathbb{R})$ , cioè*

$$(\widehat{f} | \widehat{g})_{L^2(\mathbb{R})} = (f | g)_{L^2(\mathbb{R})}$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} (\widehat{f} | \widehat{g}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k) dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dk \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}} \bar{f}(x) dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-iky}}{\sqrt{2\pi}} g(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx dy}{2\pi} \bar{f}(x) g(y) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-y)} dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy \bar{f}(x) g(y) \delta(x-y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(x) g(x) dx = (f | g) \end{aligned}$$

quindi  $\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ . □

**Teorema 11.18.** *Se  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$  allora  $f\widehat{g}$  e  $\widehat{f}g \in L^1(\mathbb{R})$  e*

$$\int f(x) \widehat{g}(x) dx = \int \widehat{f}(x) g(x) dx$$

**Definizione 11.5** (Convoluzione). Si definisce *convoluzione* tra due funzioni

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} f(y) g(x-y)$$

La trasformata di Fourier rende il calcolo di convoluzioni di funzioni particolarmente semplice, rendendolo semplicemente un prodotto algebrico tra due trasformate, come precisato nella proposizione seguente

**Proposizione 11.2.** *Se  $f$  e  $g$  sono funzioni in  $L^2(\mathbb{R})$ , allora*

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

*Dimostrazione.*

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)](k) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} g(y) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{2\pi} f(x) g(y) e^{-ik(x+y)} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{2\pi} f(x) g(t-x) e^{-ikt} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikt} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) g(t-x) \right] \\ &= \mathcal{F}(f * g)(k) \end{aligned}$$

□



Le matrici di Pauli sono degli operatori lineari  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  che assumono un ruolo fondamentale nella descrizione dello spin dell'elettrone in meccanica quantistica. Le matrici di Pauli sono dunque matrici quadrate due per due, e hanno la seguente forma

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_2 &= \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ \sigma_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

È immediato verificare che

$$\sigma_j^2 = \mathbb{1} \quad \forall j = 1, 2, 3$$

Le matrici di Pauli godono inoltre della seguente proprietà, che viene vista come la loro relazione definitoria.

**Definizione A.1.** Si dicono matrici di Pauli le matrici  $\sigma_i \in GL(2, \mathbb{C})$  tali per cui

$$\sigma_i \sigma_j = \sum_{k=1}^3 i \epsilon_{ijk} \sigma_k + \delta_{ij} \mathbb{1}$$

Nella definizione appena data  $GL(2, \mathbb{C})$  indica lo spazio delle matrici due per due sul campo complesso, mentre  $\epsilon_{ijk}$  è il tensore di Levi-Civita del terzo ordine.

Dalla definizione di matrici di Pauli si può notare che esse sono formate dalla somma di un termine simmetrico, dovuto al delta di Kronecker, e uno antisimmetrico, dovuto al tensore di Levi-Civita.

Dalla definizione data sono immediati i seguenti fatti

(i) Il commutatore

$$[\sigma_i, \sigma_j] = \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

(ii) l'anticommutatore

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} \mathbb{1}$$

(iii)  $\text{Tr}(\sigma_j) = 0 \quad \forall j = 1, 2, 3$

$$(iv) \det(\sigma_j) = -1 \quad \forall j = 1, 2, 3$$

$$(v) \sigma_j^\dagger = \sigma_j \quad \forall j = 1, 2, 3$$

Le matrici di Pauli, assieme all'identità, essendo fra loro indipendenti, generano il campo  $GL(2, \mathbb{C})$ , cioè sono una base per  $GL(2, \mathbb{C})$ . Inoltre le matrici di Pauli generano il gruppo unitario speciale di secondo grado  $SU(2)$ , che è isomorfo a  $SO(3)$ , ed è un gruppo Lie.



# B

## FUNZIONE $\zeta$ DI RIEMMAN

**Definizione B.1.** La funzione  $\zeta$  di Riemman è definita nel modo seguente

$$\zeta(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$$

$\forall x \in \mathbb{C}$  t.c.  $\text{Re}(x) > 1$ .

La restrizione sulla  $x$  è necessaria affinché la serie converga.

Eulero dimostrò questa importante proprietà per la  $\zeta$  di Riemman, che può valere anche da relazione definitoria, e ha un ruolo fondamentale nello studio dei numeri primi.

**Teorema B.1** (Prodotto di Eulero).

$$\zeta(x) = \prod_{p=\text{numero primo}}^{+\infty} \frac{1}{1-p^{-x}}$$

*Esempio B.1.* Calcoliamo per esempio  $\zeta(2)$ .

Consideriamo la funzione  $f(x) = x^2$  e rendiamola periodica fra  $[-\pi, \pi]$  di periodo  $2\pi$ , allora possiamo sviluppare  $f$  in serie di Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

Siccome  $f(x)$  è pari tutti i  $b_n$  saranno nulli, inoltre

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt = \frac{\pi^2}{3} \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \cos(nt) dt = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

Dunque

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

Se poniamo  $x = \pi$

$$f(\pi) = \pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} (-1)^n$$

da cui

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Allo stesso modo è possibile verificare, partendo dalla funzione  $f(x) = x^4$ , che

$$\zeta(4) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$



## DELTA DI DIRAC

La delta di Dirac è una distribuzione, o funzione generalizzata, che può essere introdotta come caso limite di molte funzioni usuali.

Iniziamo introducendo la funzione  $\theta$  di Heavyside

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

che è una funzione usuale anche se discontinua. Grazie ad essa possiamo definire una funzione con un picco largo  $2\alpha$

$$\delta_\alpha = \frac{\theta(\alpha^2 - x^2)}{2\alpha}$$

tale che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\alpha(x) dx = 1$$

Possiamo ora mostrare una delle proprietà di questa funzione calcolandone l'integrale con una funzione analitica  $\phi$ .

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\alpha(x) \phi(x) dx = \phi(0)$$

A questo punto possiamo immaginare di scambiare il limite con il segno di integrale ed ottenere la funzione  $\delta$  di Dirac

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \delta_\alpha(x)$$

anche se, come già ricordato, la  $\delta$  non è una funzione nel senso usuale del termine.

Evidentemente  $\delta(x - x_0) = 0$  per ogni  $x \neq x_0$  mentre in  $x_0$  diverge. Possiamo quindi, per evitare passaggi al limite come quello precedente, considerare la seguente uguaglianza come la relazione definitoria della  $\delta$  di Dirac

**Definizione C.1.** La funzione  $\delta$  di Dirac è la distribuzione definita dal seguente integrale

$$\int_a^b \phi(x) \delta(x - x_0) dx = \phi(x_0) \quad a < x_0 < b$$

dove  $\phi$  è una funzione analitica in  $(a, b)$ .

Come si può notare il punto  $x_0$  in cui la  $\delta$  si annulla deve appartenere all'intervallo di integrazione, altrimenti l'integrale precedente vale 0.

Molte altre funzioni possono essere utilizzate come rappresentazione della  $\delta$ , per esempio

$$(i) \quad \delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin(\alpha x)}{\pi x}$$

$$(ii) \quad \delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

$$(iii) \quad \delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-\alpha^2 x^2}$$

$$(iv) \quad \delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 \alpha x}{\pi \alpha x^2}$$

$$(v) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x + i\epsilon} = VP \frac{1}{x} - i\pi \delta(x)$$

dove VP indica l'integrazione in valor principale.

Possiamo ora passare alle proprietà della  $\delta$ , innanzitutto a partire dalla definizione data inizialmente in termini della  $\theta$  di Heavyside osserviamo che è una funzione pari

$$\delta(ax) = \delta(-ax) = \delta(|a|x)$$

A questo punto, mediante un cambio di variabili nell'integrale definitorio C.1, possiamo ottenere

$$\int \phi(x) \delta(ax) dx = \frac{1}{|a|} \int \phi(x) \delta(x) dx$$

e quindi

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$$

Un'altra proprietà molto importante è quella che esprime la  $\delta$  di una funzione  $g$  con uno zero in un punto  $x = x_0$ . Supponiamo che  $g$  sia una funzione sviluppabile in un intorno di tale punto come  $g(x) = \frac{dg}{dx} \Big|_{x=x_0} (x - x_0) + o(|x - x_0|)$ , e che in un intorno di tale punto non ci siano altri zeri. Otteniamo quindi

$$\delta(g(x)) = \delta \left[ \frac{dg}{dx} \Big|_{x=x_0} (x - x_0) \right] = \frac{\delta(x - x_0)}{\left| \frac{dg}{dx} \right|}$$

Generalizzando al caso in cui gli zeri della funzione  $g$  siano più di uno possiamo scrivere

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|dg/dx(x_i)|}$$

Il significato di questa relazione è quello che esprime il calcolo dell'integrale della  $\delta$  di una funzione  $g$  con un'altra funzione  $\phi$ , su un intervallo  $(a, b)$  contenente gli zeri  $x_1, \dots, x_n$  di  $g$

$$\int_a^b \phi(x) \delta(g(x)) dx = \sum_{i=1}^n \int_a^b \phi(x) \frac{\delta(x - x_i)}{|dg/dx(x_i)|} dx = \sum_{i=1}^n \frac{\phi(x_i)}{|dg/dx(x_i)|}$$

Infine possiamo esprimere il significato delle derivate della delta,  $\delta'(x) = \frac{d}{dx} \delta(x)$ , infatti integrando per parti il seguente integrale otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a \phi(x) \delta'(x) dx &= \int_{-a}^a \frac{d}{dx} [\phi(x) \delta(x)] dx - \int_{-a}^a \frac{d\phi(x)}{dx} \delta(x) dx \\ &= - \frac{d\phi}{dx} \Big|_{x=0} \end{aligned}$$